応用数学 II(伊達担当）模擬試験問題
学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前：＿＿＿＿＿＿＿＿

「解答スペースが不足するときはそのことを明記して裏面に続けてもよい」

【問 1】（関数の直交性） [20 点]

区間 $[a,b]$ において，複素数値の関数 f,g に対して，積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ によって決まる複素数を内積 (f,g) とよぶ．ここで $\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の複素共役である．

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 $-\pi < x \le \pi$ で直交しているという．この事を数式を使って示しなさい．

(2) 関数 e^{inx} と e^{imx} が区間 $-\pi < x \le \pi$ で直交していることを示せ．ここで n,m は整数で $n \ne m$.

【問 2】（フーリエ級数）[20 点]

周期 2π の関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数は，$f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$， $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ と表すことができる．周期 2π の関数 $f(x) = -x,\ -\pi \le x < \pi$ の複素フーリエ級数を求めよ．

【問 3】（ラプラス変換） [20 点]

微分方程式

$$f'(x) + f(x) = 3$$

の両辺をラプラス変換することにより，この微分方程式の解を求めよ．なお初期値 $f(0) = 2$ とし，必要であれば，$\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, $\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = 1/(s-\alpha)$, $\mathcal{L}\{f'(x)\} = -f(0) + sF(s)$ というラプラス変換の結果を使ってよい．ここで $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ は $f(x)$ のラプラス変換である．

【問 4】（フーリエ変換，線形システム）[40 点]

(1) インパルス応答 $h(t)$ をもつ線形時不変システム S に複素正弦波 $f(t) = e^{i\omega t}$ を入力した時，システムの出力 $g(t) = S[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ がどうなるか計算し，最終的な結果をインパルス応答のフーリエ変換 $H(\omega)$ を用い示しなさい．

(2) (1) の結果から分かることを簡潔な文章で記述しなさい．
(キーワード： 問題文中の単語、周波数特性，振幅，位相，固有値．固有関数）

(3) インパルス応答 $h(t)$ が

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

である線形時不変システム S に信号

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

が入力された．たたみこみ積分によりシステムの出力 $g(t)$ を求め <u>$g(t)$ のグラフを図示</u> しなさい．