学籍番号：

2005 年 10 月 6 日
応用数学 2　　　　　　　　　　名前：＿＿＿＿＿＿　得点：＿＿＿＿

小テスト： 解答例

4 次元空間において各ベクトルを次の正規直交基底で表現する場合を考えよう.

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

いまベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

と基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ の線形結合（1 次結合）で表現されている．このとき x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ.

答え

直交基底の場合，各基底ベクトルの成分は内積をとれば求まる.

$$\begin{aligned} x_1 &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}7 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \\ &= \frac{13}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

このように $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分が基底と内積をとることにより取り出せる.

同様に

$$x_2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2) = -\frac{7}{2}, \qquad x_3 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3) = -\frac{5}{2}, \qquad x_4 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_4) = -\frac{3}{2}$$

実際にそうなっているのか検算してみよう.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 \\ &= \frac{13}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{7}{4}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{5}{4}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005am2/index.html`