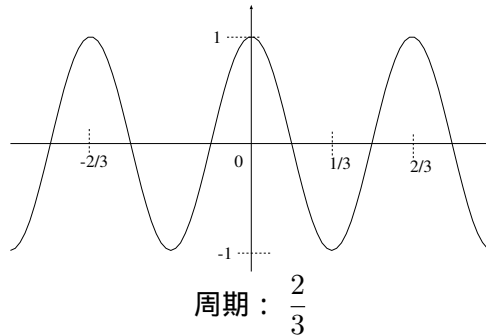


2005年11月10日  
 応用数学2

名前： \_\_\_\_\_ 得点： \_\_\_\_\_

小テスト

1.  $\cos(3\pi x)$  のグラフを描き、周期を求めよ。



問2： 周期  $2\pi$  の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

をフーリエ級数展開せよ。また、係数  $\frac{a_0}{2}$  の値は何を意味しているか記述せよ。

【回答例】

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

したがって  $n$  が偶数のとき  $b_n = 0$  ,  $n$  が奇数のとき  $b_n = -\frac{2}{n\pi}$  となり、

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$  は  $f(x)$  の平均値である。

【解説】  $\cos nx = (-1)^n$  を使えばすっきり書ける。  $a_0/2 = 1/2$  は  $f(x)$  の平均値である。通常、フーリエ級数展開するとき、これを付け加えるのを忘れないこと。