

2005年11月24日
 応用数学2

名前： _____ 得点： _____

小テスト：解答例

A. $\mathbf{f} = (1, 1, 1, i, i, i), \mathbf{g} = (i, i, 1, 1, i, i), \mathbf{h} = (i, i, i, 1, 1, 1)$ のとき以下の内積，ノルムを求めよ．

$$1. (\mathbf{f}, \mathbf{g}) = -2i + 1 + i + 2 = 3 - i$$

$$2. (\mathbf{g}, \mathbf{f}) = 2i + 1 - i + 2 = 3 + i$$

$$3. \|\mathbf{f}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 3 + 3 = 6$$

$$4. \|\mathbf{g}\|^2 = 6$$

$$5. (\mathbf{f}, \mathbf{h}) = 3i - 3i = 0$$

B. e^{inx} と e^{imx} ， n, m は整数で $n \neq m$ ，が区間 $-\pi < x < \pi$ で直交していることを示せ．

$$\begin{aligned} (e^{inx}, e^{imx}) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos((n-m)x) + i \sin((n-m)x)\} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos((n-m)x) dx \\ &= -2(n-m) [\sin((n-m)x)]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

【解説】

複素数の値をもつ関数なので，内積をとる際には一方の複素共役をとる．内積 $(e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 0$ を示せばいい．

C. 複素フーリエ級数を構成する一つの項 $c_n e^{inx}$ は $c_n e^{inx} = A e^{i(nx+B)}$ (c_n は複素数， A, B は実数) と書ける． $c_n = a_n + ib_n$ (a_n, b_n は実数) とおき， A, B を求めなさい．

$$c_n e^{inx} = |c_n| e^{i\{nx + \arg(c_n)\}}$$

$$A = |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$B = \arg(c_n), \text{ ここで } \tan B = \frac{b_n}{a_n} \implies B = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$