学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005年12月1日
応用数学2　　　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト：解答例

問題：

次の周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2n\pi)$, の複素フーリエ級数を求めよ

まずは 1) グラフを描いてみる．次に，2) 複素フーリエ係数を計算する．3) $f(x)$ を $n = -5, -4, \cdots, 4, 5$ 項目まで具体的に書き下してみる．その結果とオイラーの公式を用いて 4) $f(x)$ を $\cos, \sin$ を使って表現し，虚数単位が消えることを確認する．

【図略】

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx - i\sin nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) \Longrightarrow n = 0, 1, 2, 3, \cdots \text{のとき} \sin(n\pi/2) \text{は} 0, 1, 0, -1, 0, 1, \cdots \text{と変化する} \\
& \begin{cases} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)\pi} & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって，$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\cdots + \frac{1}{5}e^{-i5x} - \frac{1}{3}e^{-i3x} + e^{-ix} + e^{ix} - \frac{1}{3}e^{i3x} + \frac{1}{5}e^{i5x} - \cdots\right)$$

これを書き直すと，

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\cdots + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right)$$

となる．

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005am2/index.html`