

2005年12月15日
 応用数学2

名前： _____ 得点： _____

小テスト：解答例

問題：

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & (-2 < x < 2) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ を求めよ。

【まず $f(x)$ のグラフを書いてみて偶関数であることに気づく。フーリエ変換した結果 $F(\omega)$ の図もできるところまで書いてみる。】

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx \\ &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos \omega x dx \\ &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega x\right)' dx \\ &= 2 \left(\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{1}{\omega} \sin \omega x \right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\omega} \sin \omega x dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^2 \sin \omega x dx \\ &= \frac{1}{\omega^2} [-\cos \omega x]_0^2 \\ &= -\frac{1}{\omega^2} (\cos 2\omega - 1) \\ &= \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\omega = 0 \text{ のとき } F(0) = \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) dx = 2$$

