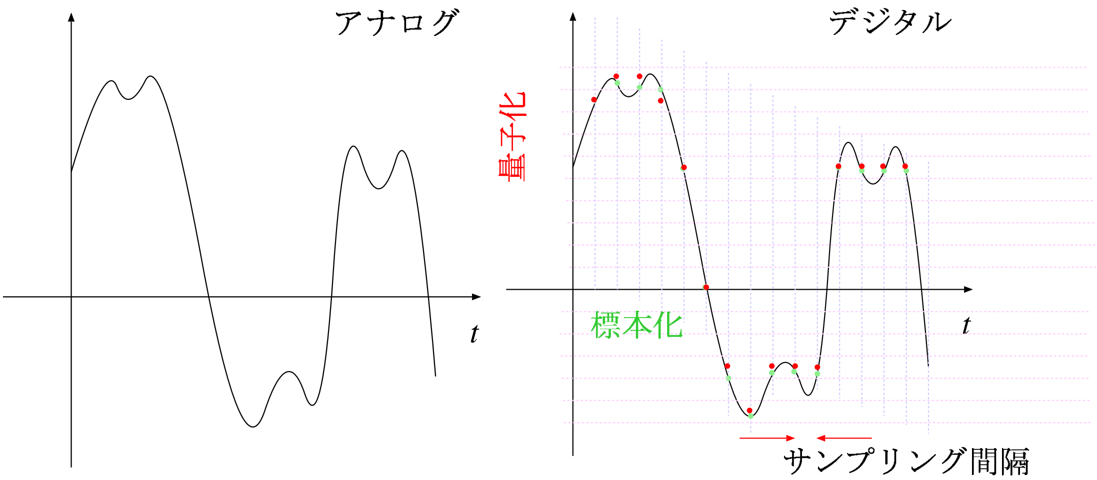
情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 1 回
2005 年 10 月 6 日

情報の表現の仕方

アナログとディジタル．データのサンプリング（標本化，量子化）

例えば音声の波形．コンピュータでどう表現されているか．



市販されている CD は通常，サンプリング周波数 44.1 kHz で記録されている，1 秒間に 44,100 個のサンプリング点（とびとびの値）があるということ．サンプリング間隔（周期）は 1000/44100 ≈ 0.0227 msec．たとえば 10msec のデータは 441 個の数値（441 次元のベクトル）で表現できる．

フーリエ解析は線形代数の続きとも言えるので,．今日は線形代数で習ったことを復習して，これからに備えよう．

記号： n 重対

$$\mathcal{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 \in \mathcal{R}, x_2 \in \mathcal{R}, \cdots, x_n \in \mathcal{R}\}$$

例：$n = 3$

$$\mathcal{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathcal{R}\}$$

ベクトルの線形結合と基底 （とても大切な概念）

$\mathcal{R}^3$ において

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

をとると

$$^\forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n \text{ は}$$

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

と $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の線形結合で表される．しかも，この係数は $\boldsymbol{v}$ で一意に定まる．

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathcal{R}^3$ の基底 (basis) とよぶ.

$\boxed{\text{正規直交基底}}$

互いの内積が

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{2}$$

となっている.

$\boxed{\text{例題}}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \in \mathcal{R}^n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathcal{R} \text{ に対して} \end{cases} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n \tag{4}$$

が n 個の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合（1 次結合）で表現されている.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

とは限らない. 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき, その第 1 成分はいくつか.

$\boxed{\text{答え}}$

ここで $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}_1$ の内積を計算してみよう.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) &= (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) && (6) \\ &= (x_1 \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (x_2 \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + \cdots (x_n \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) && (7) \\ &= x_1 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + x_2 (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + \cdots x_n (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) && (8) \\ &= x_1 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) && (9) \\ &= x_1 && (10) \end{aligned}$$

このように $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分が内積をとることにより取り出せる.

$\boxed{\text{例題}}$

基底ベクトルとして

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

を考える.

$$\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

このときの x_1, x_2 を求めよ.

$\boxed{\text{答え}}$

$$x_1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \tag{13}$$

$$x_2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \tag{14}$$

したがって

$$\boldsymbol{v} = 5\sqrt{2}\boldsymbol{e}_1 - 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2 \tag{15}$$