情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 3 回
2005 年 10 月 20 日

フーリエ級数

今日の目標

フーリエ級数とは何か.

$$f(x) \approx a_0' + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

これは $\sin x, \cos 2x$ などの線形結合．$a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2 + \cdots$ は定数．$\sin x, \cos 2x$ などを（基底）ベクトルとみる．線形代数：任意のベクトルを基底ベクトルの線形結合で表現する．→ どんな関数（ベクトル） $f(x)$ も $\sin x, \cos 2x$ などの線形結合で表現できるか.

$\sin x, \cos 2x$ などがベクトルとみなせるなら，その長さとか向きとは何なのか.

n が大きくなるほど細かい情報を表現.「大まか」から「細かな」情報へ．これがフーリエ級数だと思っていい．通常，人間の理解も「大ざっぱな理解から細かな理解へ」と進むので，まずはおおざっぱにフーリエ級数の意味をつかむ.

1) 公式から説明．教科書の方法.
2) 基底をつかった表現から説明．この講義.

先週のおさらい：（基本）周期について

$f(x) = \sin x$ の周期は 2π.
$f(x) = \sin(2\pi x)$ の周期について.

考え方その 1.
$\sin(\ )$ の中身が 2π 変化するのが 1 周期 → $x = 1$ のときに $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi)$ → 基本周期は 1.

考え方その 2：数式で考える：
$f(x+T) = f(x)$ となる T を計算する，$\sin(2\pi(x+T)) = \sin(2\pi x)$.
$\sin(\ )$ は基本周期 2π であるので，$2\pi(x+T) - 2\pi x = 2\pi$ を満たす T が周期．$2\pi T = 2\pi \rightarrow T = 1$

周期が複合したのはどう考えるか.
太陽の回りを 3 年で 1 周するもの → 周期 3 年.
太陽の回りを 2 年で 1 周するもの → 周期 2 年.
現在の配置と同じ配置がおこるのは 6 年後（最小公倍数）.

問題：周期 2π の関数を周期 T になるよう変換したい.

$$\begin{cases} f(x) & \text{周期 } 2\pi \text{と仮定} \\ f(2\pi x) & \text{周期 } 1 \\ f(\frac{2\pi}{T} x) & \text{周期 } T \end{cases} \tag{1}$$

$x \rightarrow \dfrac{2\pi}{T} x$ に変換すると周期 T の関数になる．どんな周期にも変換できる.

問題： $\sin \pi x$ の周期を求めよ.

話を簡単にするため，これからの話はすべて周期 2π で考える.

問題

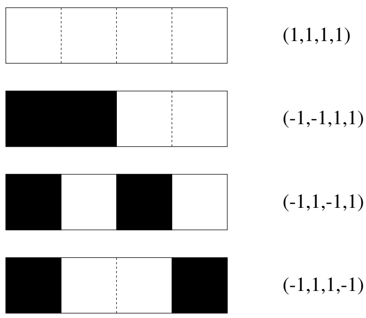
ある信号を，A 地点から B 地点に送りたい．信号は無限の精度で送れない．たとえば 1 秒間に 10 個の整数（$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$）しか送れない，という制約があったとする．どういう風にデータを送るのが効率的か.

1. 基底の線形結合で情報を表現する．どんな基底を使うかは，お互い前もって知っている.
2. その基底のもとで，係数を送る．直交基底なら係数は基底との内積できまる.
3. 「大まかな情報」を先に送り，細かな情報を後で送る.

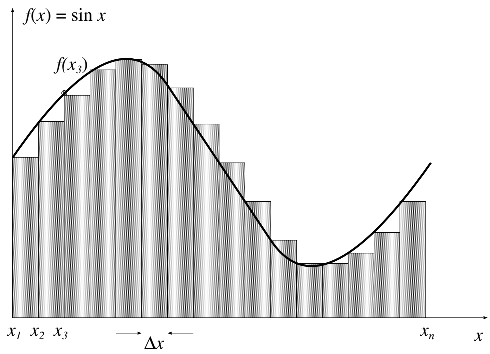
(4. 信号の規則性を利用する．信号はでたらめではない．隣り合う値は似通っている.)

$\sin x$ をベクトルとみる，とは：

1. 1 日目の演習問題を思い出す．4 次元ベクトル.



2. どんな 4 次元のベクトルも，この基底の線形結合で表現できる.
3. 直交していることを確認.
4. これを長く取る．たとえば 1000 次元.
5. $\sin x$ を横方向に離散化して考える.



$$f(x) \approx \Big[f(x_1), \quad f(x_2), \quad \cdots, \quad f(x_n) \Big]$$

n 次元ベクトル．$n \to \infty$ 無限次元ベクトル．
6. これで $\sin x, \cos 2x$ などを基底ベクトルとみることができる．
7. 基底ベクトルは $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots,$.
8. どんな関数 $f(x)$ でも，これらの線形結合で表現できそうではないか．$f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + \cdots, +d\sin x + \ldots$ （同じ周期のもの，たとえば $\sin x, \cos x$ は，どちらかで書き換えられるはず，と気づくかもしれない．それがあとの複素フーリエ級数.）

※ 教科書はこれとは違った順序で説明をしている．

講義でこう進む理由：いきなり「周期」とか「積分区間の不偏性」と言われても，後のための準備になっているのだろうけれど，何のためにやっているのか，わかりずらい．そこで，なぜ，こういうことを考えないといけないのかが分かるように順番を変えた．

$\sin x$ がベクトルなら，その長さや方向とはどんなものか

線形結合の係数 $a_1, a_2, \cdots$ などは $f(x)$ と内積をとったものになるのだろうか．それは，基底が直交していなければならなかった．実は，後でみるように $\sin x, \cos x$ は互いに直交している，と言える．

→ 直交している，とは何か．→ ベクトルの内積がゼロになること．
→ 直交している，ことを示すには内積を定義しないといけない．
→ ベクトルの大きさは，自分自身との内積で定義していた．

内積とは何だったか．→ 内積は「内積の公理」を満たせば何でも勝手に定義してよい．
ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を考えよう．

内積の公理：

1. 線形性 $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
2. 対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
3. 正値性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, 0 は $\boldsymbol{x} = 0$ のときに限る

公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけであって，内積を具体的にどのように定義するのかをいっているわけではない．「物理的性質を上手に表現するように」決めればよいのである．

ノルム $||\boldsymbol{x}||$：ベクトルの長さを一般化したもの．

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

で定義するノルムが 0 でない二つのベクトルのあいだの角度 θ を，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$$

で定義する．このとき

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

であるならば，$\cos\theta = 0$ すなわち $\theta = \pi/2$ である．0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積が 0 になるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はたがいに直交するという．