情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 5 回
2005 年 11 月 10 日

フーリエ級数

今日の目標

目標： 様々な関数のフーリエ級数を求める.

次週

複素フーリエ級数.

先週の話

周期 2π のフーリエ級数

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

※ 係数の意味： $\cos kx, \sin kx$ が基底で，a_n, b_n は $f(x)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）.

1.4 フーリエ級数の例

1) 周期 2π の偶関数 $f(x)$　　　[偶関数：$f(-x) = f(x)$]

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, \cdots \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数})\cdot(\text{偶関数}) dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ n = 1, 2, \cdots \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数})\cdot(\text{奇関数}) dx = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$f(x)$ が偶関数の場合 cos 項のみが残る.

2) 周期 2π の奇関数 $f(x)$ 　　　[奇関数： $f(-x)=-f(x)$]

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n=0,1,2,\cdots \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数})\cdot(\text{偶関数}) dx = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n=1,2,\cdots \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数})\cdot(\text{奇関数}) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数}) dx \qquad (1) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$f(x)$ が奇関数の場合 sin 項のみが残る.

3b) $[-\pi,\pi]$ で $f(x)=x^2$ となる周期 2π の関数

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx,\ n=0,1,2,\cdots \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数})\cdot(\text{偶関数}) dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx dx, \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]' dx, \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{1}{n}\sin nx dx\right\} \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]' dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx dx\right\} \\
&= \frac{4}{n\pi}\left\{\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx dx,\ n=1,2,\cdots \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数})\cdot(\text{奇関数}) dx = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{4}{16}\cos 4x + \cdots \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

※ このように計算は大変面倒である...

※ 蛇足

この $f(x) = x^2$ をフーリエ級数展開した結果に $x = \pi$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{-1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{-1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\
\frac{2}{3}\pi^2 &= 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\
\pi^2 &= 6\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \\
\frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots
\end{aligned}
$$