情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 6 回
2005 年 11 月 17 日

フーリエ級数

今日の目標

目標 1： 複素フーリエ級数について知る．
目標 2：複素数の掛け算の意味を理解する．

来週

複素フーリエ級数について理解し，簡単な関数について級数展開する．

先週の話

周期 2π のフーリエ級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

※ 係数の意味： $\cos kx, \sin kx$ が基底で，a_n, b_n は $f(x)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）．

※ 疑問点：教科書 (1.11) の式で a_0 の項だけは別に扱われ，$\frac{a_0}{2}$ が $f(x)$ を級数展開したときの構成要素になっている． a_0 とは何を意味しているのか．

$\frac{a_0}{2}$ の項は $f(x)$ の平均値を示している．$f(x)$ を「まずは粗く表現し，徐々に細かく表現する」ことがフーリエ級数の項数を増やすこと $n = 0, 1, \cdots$ に対応している．$f(x)$ を近似する場合，もっとも粗い表現が，その平均値．ではなぜ $\frac{a_0}{2}$ のように a_0 に $\frac{1}{2}$ を掛けるのか．フーリエ級数は関数 $f(x)$ を基底ベクトル $1, \cos x, \sin x\ \cos 2x, \sin 2x, \cdots$ の線形結合で表現することであった．この中で基底ベクトル「1」 だけは仲間外れのような形をしている．ただし $\cos 0 = 1$ なので $\cos nx$ で $n = 0$ とみれば $n = 0$ の項もまとめて a_n と書ける．そうして上記のように $a_n, n = 0, 1, \cdots$ ときれいにまとめて書いた場合，この公式を使って平均値の項を表現すると $\frac{a_0}{2}$ となる．基底ベクトル 1 のノルムは 2π であるが，基底ベクトル $\cos nx$ のノルムは π であることがその理由（教科書 p.22，式 1.64, 1.65, 1.66）．

複素フーリエ級数 ：本質的にフーリエ級数と同じ

周期 2π に関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \cdots + c_{-3}e^{-3ix} + c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-2}e^{2ix} + c_{-2}e^{3ix} + \cdots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$ ：オイラーの公式

なぜわざわざ複素フーリエ級数か：複素フーリエ係数の意味
（※ このような疑問に教科書はめったに答えてくれない）

- 復習： $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ は $A\sin(nx+\theta_n)$ と表現することもできる．同じ周期をもつ三角関数どうしを重ね合わせた関数は cos でも sin でも表現できる．

$$f(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right)$$

これは

$$f(x) = A_n \sin(x+\theta_n)$$

と書ける．ここで

$$\cos\theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\ \sin\theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\ A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

- $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ は周期 $\dfrac{2\pi}{n}$ の項の振幅．$A_0, A_1, \cdots,$ を計算することにより，どの周期の変動成分が大きいか分かる．
- a_n 偶関数成分，b_n 奇関数成分．
- 区分的なめらかな周期関数は $\cos nx$ と $\sin nx$ の重みつき和で表現でき，その表現の仕方はただ一通りにきまる．
- このことからも（周期）関数は偶関数と奇関数の和で表現できることが分かる．
- 複素数を使うと，計算がとても便利．位相 θ と振幅 A を深く考えなくても計算ができる．

  ある数にある複素数 α を掛けるということは，ある数の大きさを $|\alpha|$ 倍し，$\mathrm{Arg}\,\alpha$ だけ回転すること．

複素数と複素平面： すべて図をイメージして意味を理解する

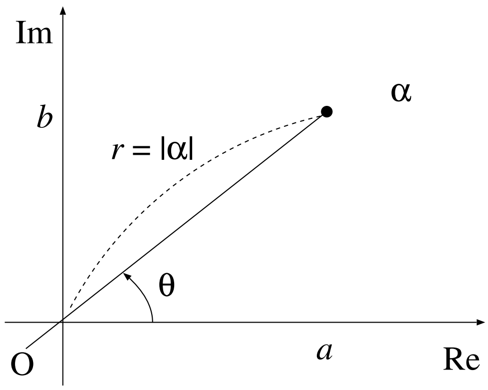
1. 複素数 $\alpha = a + bi = |\alpha|e^{i\theta}$
2. 複素平面：複素数は 2 次元の実ベクトル (a, b)，実部 a，虚部 b
3. 極形式表示： 絶対値（振幅）$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$，偏角（位相）$\theta = \arg(\alpha)$
4. 複素数の積 （絶対値どうしをかけて偏角は足す）

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta|e^{i(\arg(\alpha)+\arg(\beta))}$$

5. オイラーの公式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 　　（不思議な式： $e^{i\pi} = -1$）

6. 1 の n 乗根： $\alpha^n = 1$ （単位円を n 分割した図をイメージ）

<u>複素平面</u>



複素数 $\alpha = a + bi$ （a, b は実数）に対して，座標平面の点 (a, b) が対応．この平面を複素平面またはガウス平面と呼ぶ．x 軸，y 軸は，それぞれ実軸，虚軸と呼ばれる．複素数は，2 次元の実数と思えば良い．

<u>複素数の基本概念</u>

複素数 $\alpha = a + ib$ （a, b：実数）に対し，

$$\begin{cases} a \text{ を } z \text{ の実部 (real part)} & a = \mathrm{Re}(\alpha) \\ b \text{ を } z \text{ の虚部 (imaginary part)} & b = \mathrm{Im}(\alpha) \end{cases}$$

と呼び，それらを，それぞれ Re (α) Im (α) と表す．

また，

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

を α の絶対値と呼び，$|\alpha|$ という記号で表す．

$|\alpha|$ は，複素平面上，点 α の原点 O からの距離である．$\alpha = a + ib$ (a, b：実数) に対し，

$$r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

とおくと，$r \neq 0$ のとき，三角関数の考えを用いて

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

となる θ が（$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲にはただ一つ）定まる．

θ を α の偏角と呼び，$\theta = \arg(\alpha)$ などと表す．このような θ を用いると，α は

$$\alpha = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

と表すことができる．これを，複素数 α の極形式表示と呼ぶ．

複素数 α, β の積の

$$\begin{cases} \text{絶対値は,（}\alpha\text{ の絶対値） × （}\beta\text{ の絶対値）} \\ \text{絶対値は,（}\alpha\text{ の偏角） × （}\beta\text{ の偏角）} \end{cases}$$

$$\alpha\beta = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} = (r + r')\{\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\}$$

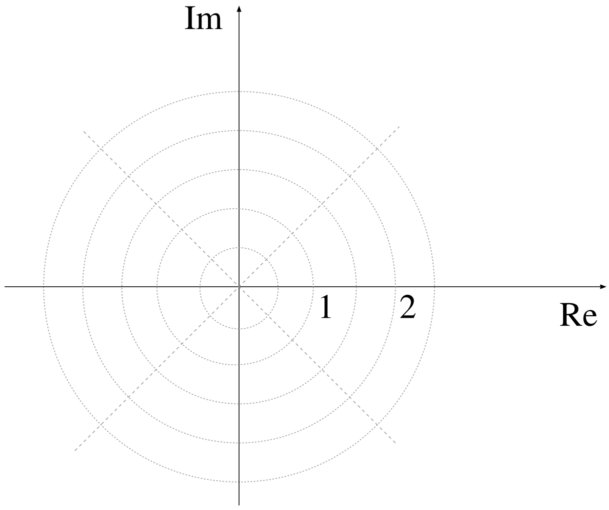
学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005 年 11 月 17 日

応用数学 2　　　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿＿

小テスト

1.　$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ とする．複素平面上に $\alpha = 0.5e^{i\theta_1}, \beta = 2e^{i\theta_2}$ をそれぞれ図示し，それらを掛け算した結果 $\gamma = \alpha \times \beta$ を求め，γ を図示せよ．



$\gamma =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 2：　$\alpha^n = 1$ を満たす複素数 α は，どのような意味の数か，まず言葉で記述し，複素数 α を求めなさい．特に，$n = 8$ の場合についての α を上の図に点で書き込みなさい．

【ヒント】 $\alpha = re^{i\theta}$ と表現して上の式に代入し，オイラーの公式をつかって実部と虚部に分け，両辺の実部と虚部を比較する．意味が分からなければ $n = 1, 2, 3, 4$ などと代入してみる．

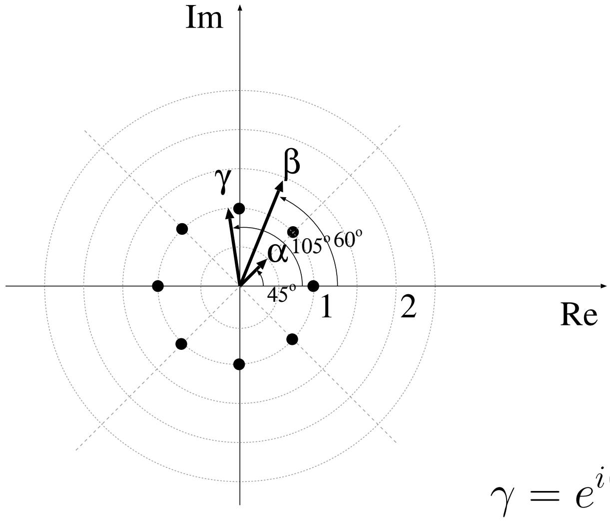
学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005 年 11 月 17 日

応用数学 2　　　　　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト：解答例

1.　$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ とする．複素平面上に $\alpha = 0.5e^{i\theta_1}, \beta = 2e^{i\theta_2}$ をそれぞれ図示し，それらを掛け算した結果 $\gamma = \alpha \times \beta$ を求め，γ を図示せよ．



$$\gamma = e^{i\left(\frac{7}{12}\pi\right)} = \cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi$$

問 2：　$\alpha^n = 1$ を満たす複素数 α は，どのような意味の数か，まず言葉で記述し，複素数 α を求めなさい．特に，$n = 8$ の場合についての α を上の図に点で書き込みなさい．

【ヒント】 $\alpha = re^{i\theta}$ と表現して上の式に代入し，オイラーの公式をつかって実部と虚部に分け，両辺の実部と虚部を比較する．意味が分からなければ $n = 1, 2, 3, 4$ などと代入してみる．

解答例：「n 回転すると 1 になるような複素数」

解答例：「n 回かけると大きさが 1，偏角（位相）が 0 になるような複素数」

$$\alpha^n = 1 \quad (1)$$

$$\{re^{i\theta}\}^n = 1 \quad (2)$$

$$r^n e^{in\theta} = 1 \quad (3)$$

$$r^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\} = 1 \quad (4)$$

$r < 1$ なら r^n は 1 よりだんたん小さくなる，逆に $r > 1$ なら r^n は 1 だんたん大きくなる．$r = 1$.

$$\cos n\theta = 1,\ \sin n\theta = 0$$

をみたす θ を求める．

$$n\theta = 2k\pi \to \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2\cdots$$

よって

$$\alpha = e^{i\theta},\ \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2\cdots$$

$n = 8$ のとき，

$$\alpha = e^{i\theta},\ \theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$$

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005am2/index.html`