情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 7 回
2005 年 11 月 24 日

複素フーリエ級数

今日の目標

複素数関数の内積.

来週

複素フーリエ級数について理解し，簡単な関数について級数展開する.
デルタ関数
フーリエ変換.

先週の話

複素フーリエ級数を知り，その準備として，複素数の計算（かけざん）の復習をした.

1.6 複素フーリエ級数

周期 2π に関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \cdots + c_{-3}e^{-3ix} + c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-2}e^{2ix} + c_{-2}e^{3ix} + \cdots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad \text{：}\underline{\text{オイラーの公式}}$$

$$\Longrightarrow e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos(nx) - i\sin(nx)$$

$$\begin{cases} e^{inx} & = & \cos(nx) + i\sin(nx) \\ e^{-inx} & = & \cos(nx) - i\sin(nx) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \cos nx, \sin nx$ を e^{inx}, e^{-inx} で表現してみる.

$$\begin{cases} \cos nx = & = & \dfrac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin nx = & = & \dfrac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \end{cases}$$

a_n, b_n と c_n の関係（複素フーリエ級数とフーリエ級数の関係）を求める（教科書とは逆方向で説明を試みる.）

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})+b_n\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})\} \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)e^{inx}+\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)e^{-inx}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
c_n & \quad \left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)=\frac{1}{2}(a_n-ib_n) \\
c_{-n} & \quad \left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx})=c_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}
$$

と書ける．

なぜわざわざ複素フーリエ級数か：複素フーリエ係数の意味

（※ このような疑問に教科書は，あたりまえすぎてなのか，答えてくれない．もちろん正確な解答があるわけではないが，各自で納得のいく回答ができるようにしておく）

必要なパラメータの個数．$f(x)$ を有限の個数の基底ベクトルで表現することを試みた場合．

フーリエ級数では $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2.\cdots,b_n$ という $2n+1$ 個のパラメータ．

複素フーリエ級数では $c_{-n},\cdots,c_{-2},c_{-1},c_0,c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$ という $2n+1$ 個のパラメータ．

パラメータの個数はあっているように思うが，各 c_i は複素数で，2 つの実数からなる，したがって複素フーリエ級数では $2(2n+1)$ 個のパラメータが必要になる．しかし，よくみると c_i と c_{-i} は複素共役の関係にあるので，c_i がわかれば c_{-i} もわかる．したがって，半分は情報をもっていない．

a_n は $\cos nx$（偶関数，周期 $2\pi/n$），b_n は $\sin nx$（奇関数，周期 $2\pi/n$）の係数（それぞれの周波数成分の重み）であった．したがって任意の関数 $f(x)$ を表現する際，フーリエ級数は，もちろんとびとびの周期信号（周波数）ごとに分解して表現するのだが，さらに偶関数成分と奇関数成分に分解して表現している．

一方 c_n は $e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx)$ の係数であり，周期 $2\pi/n$ の成分をまとめて表現している．ただし c_{-n} もある．これは $e^{-inx}=\cos(nx)-i\sin(nx)$ の係数であり．これも周期 $2\pi/n$ の成分である．せっかくまとめたのに，n が $-\infty$ まで走り，表現が冗長になっているようにみえる．これはなぜか．

c_ne^{inx} の（複素数 $\times$ 複素数）の無限個の和が実数 $f(x)$ になっている．そもそも $\mathrm{e}^{inx}=\cos nx+i\sin nx$ に複素数 c_n を掛けることはどういう意味があるのか．e^{inx} は絶対値 1 の正弦波であるので，この振幅を $|c_n|$ 倍して位相を $\theta=\arg(\mathrm{c_n})$ だけ進めていると解釈できる．ここで $\theta=\arg(c_n)$ は $c_n=a+ib$ とすると，$\tan b/a=\theta$ を 満たす θ のこと．つまり，$c_n\mathrm{e}^{inx}$ は $|c_n|\mathrm{e}^{i(nx+\arg(c_n))}$．そ

れぞれの c_n は 基本周期 $2\pi/n$ の周波数成分の位相と振幅の大きさを示している．c_n と c_{-n} は共役関係にあり，したがって和をとると虚数成分はキャンセルされる．

$$c_n\mathrm{e}^{inx} = c_n(\cos nx + i\sin nx),\ c_{-n}\mathrm{e}^{-inx} = c_n(\cos nx - i\sin nx)$$

c_n, c_{-n} も複素数なので，これを a_n, b_n を使って実数で表現する．

$$c_n\mathrm{e}^{inx} = c_n(\cos nx + i\sin nx) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)(\cos nx + i\sin nx) = \frac{1}{2}(a_n\cos nx + b_n\sin nx + i(a_n\sin nx - b_n\cos nx))$$

$$c_{-n}\mathrm{e}^{-inx} = c_{-n}(\cos nx - i\sin nx) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)(\cos nx - i\sin nx) = \frac{1}{2}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) - i(a_n\sin nx - b_n\cos nx$$

したがって，

$$c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx} = a_n\sin nx + b_n\cos n$$

となり実数成分しか残らない．

フーリエ級数とは何だったか

任意の関数 $f(x)$ を 基底ベクトル の線形結合で表現．
複素フーリエ級数の基底 (教科書 p.26)

$$\{\cdots, e^{-3ix}, e^{-i2x}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{i2x}, e^{i3x}, \cdots\}$$

1.5 ベクトルと関数：内積と直交基底

基底が直交していると，$f(x)$ を表現する際，各基底の成分（係数）は基底ベクトルと内積をとったものなる．ただし基底ベクトルが直交していないといけない．→ 直交しているのか．→ 直交しているかどうかは内積を求めればいい．→ 内積はどう定義していたか．→ 複素数の内積は，一方を複素共役をとる．

復習：ベクトルの内積

$$\boldsymbol{X} = [f_1, f_2, \cdots, f_n],\ \boldsymbol{Y} = [g_1, g_2, \cdots, g_n] \text{ とすると}$$

内積：

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_ng_n = \sum_{k=1}^{n} f_kg_k$$

直交：

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 0$$

自分自身との内積：

$$||\boldsymbol{X}||^2 = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \Longrightarrow \text{ベクトルの長さの 2 乗}$$

このままでは f_k が複素数をとるとき（例えば $f_k = i$ のとき）$||\boldsymbol{X}||^2$ が負や複素数になってしまう．

複素ベクトルの内積

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} f_k\overline{g_k}$$

とする．なぜかというと，自分自身と内積をとったとき，実数にしたいから．$\bar{\ }$ は複素共役をとる操作．複素共役： $i \to -i$ とおく．こうすれば

$$||\boldsymbol{X}||^2 = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \overline{f_k} = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \geq 0 \text{（常に非負）}$$

$$※ (\alpha \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), (\boldsymbol{X}, \alpha \boldsymbol{Y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

$$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} g_k \overline{f_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} f_k \overline{g_k}} = \overline{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})}$$

順を入れ替えると複素共役となる．
例：$f = (i, i, i), g = (1, 1, 1)$ のとき，

$$(f, g) = 3i,\ (g, f) = -3i$$

複素関数の内積

　ある区間 $[a, b]$ において複素数値の関数 f, g に対して，次のような積分によって決まる複素数を (f, g) と表し，f と g の内積と呼ぶ．

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}dx} = (g, f)$$

直交性

例： e^{-i3x} と e^{ix} が区間 $-\pi < x < \pi$ で直交していることを示す．
(内積 $(\mathrm{e}^{-i3x}, \mathrm{e}^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i3x}\mathrm{e}^{-ix}dx = 0$ を示せばいい．)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{-i3x}, \mathrm{e}^{ix}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i3x}\mathrm{e}^{-ix}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i4x}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 4x - i \sin 4x\}dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \cos 4x dx \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4} [\sin 4x]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

一般の $n, m, n \neq m$ の場合も，上のような計算になることは簡単に確かめることができる．

例：基底のノルム． e^{-i3x} の区間 $-\pi < x < \pi$ でのノルムを求める．

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{-i3x}, \mathrm{e}^{-i3x}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i3x}\mathrm{e}^{i3x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{0}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

一般の場合も，上のような計算になることは分かる．