情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 8 回
2005 年 12 月 1 日

複素フーリエ級数の計算の例，パーセバルの等式

今日の目標

複素フーリエ級数について理解し，簡単な関数について級数展開する.
1.6 複素フーリエ級数
1.8 パーセバルの等式
2.1 収束定理
3. デルタ関数

来週

フーリエ変換（この講義のメイン）のはじまり

先週の話

複素フーリエ級数とはどういうものかを知り，ある関数の複素フーリエ級数を計算する準備として，複素数値ベクトル，複素数値関数の内積，ノルム，ベクトルどうしの直交性とは何か習った.

1.6 複素フーリエ級数

周期 2π に関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \cdots + c_{-3}e^{-3ix} + c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-2}e^{2ix} + c_{-2}e^{3ix} + \cdots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

フーリエ級数の計算例

例 1：
周期 2π の関数 $f(x) = x$ の複素フーリエ級数を区間 $-\pi < x \leq \pi$ で求める.
$f(x)$ を $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ と複素フーリエ級数表現するとき，その係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

と計算できる．具体的には,

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \Longrightarrow \text{平均値に対応} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\cos nx - i\sin nx\right) dx \\
&= \text{（奇関数} \times \text{偶関数} = \text{奇関数）} \\
&= -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx \\
&= -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{ x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)' \right\} dx \\
&= \frac{i}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{ x\left(\cos nx\right)' \right\} dx \\
&= \frac{i}{n\pi}\left\{ \left[x\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \cos nx dx \right\} \\
&= \frac{i}{n\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{i}{n\pi}\pi\cos n\pi = i\frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

したがって $f(x)$ の複素フーリエ級数表現は

$$
f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx}
$$

となる.

例 2：

周期 2π の関数

$$
f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leqq 0 \\ 1, & 0 < x \leqq \pi \end{cases}
$$

を複素フーリエ級数展開する.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} (-1) dx + \int_{0}^{\pi} dx \right\} = 0 \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{ -\int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx \right\}
\end{aligned}
$$

こう進めてもいいが，$f(x)$ は奇関数なので，その特徴を活かすべく，偶関数と奇関数に分解.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx) dx \\
&= -\frac{i}{\pi}\left\{ \int_{0}^{\pi} \sin nx dx \right\} \\
&= \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{i}{n\pi}((-1)^n - 1) \text{ ※ } n \text{ が偶数のとき } 0,\ n \text{ が奇数のとき } -2
\end{aligned}
$$

したがって $f(x)$ の複素フーリエ級数表現は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{inx} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} i\frac{2}{(2m-1)\pi} e^{i(2m-1)x}$$

となる．よくわからないので具体的に $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 代入して分解してみよう．

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{inx} \\ &= \cdots + i\frac{2}{5\pi}e^{-i5x} + i\frac{2}{3\pi}e^{-i3x} + i\frac{2}{\pi}e^{-ix} - i\frac{2}{\pi}e^{ix} - i\frac{2}{3\pi}e^{i3x} - i\frac{2}{5\pi}e^{i5x} + \cdots \end{aligned}$$

これは例えば

$$i\frac{2}{5\pi}e^{-i5x} - i\frac{2}{5\pi}e^{i5x} + \cdots = \frac{i2}{5\pi}\{e^{-i5x} - e^{i5x}\} = \frac{i2}{5\pi}\{-2i\sin 5x\} = \frac{4}{5\pi}\sin 5x$$

となるので,

$$f(x) \sim \cdots + \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

これは，もちろん通常のフーリエ級数と同じになる.（教科書 p.15 式 1.34）

例 3：

周期 2π の関数 $f(x) = x^2$ の複素フーリエ級数を区間 $-\pi < x \leq \pi$ で求める．
$f(x)$ を $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ と複素フーリエ級数表現するとき，その係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

と計算できる．具体的には,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)' dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[x^2\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)dx\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi^2}{in}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2\sin n\pi}{n} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)' dx\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2}{n}\sin n\pi + \left[\frac{2xe^{-inx}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n^2}e^{-inx}dx\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2}{n^2}[\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}] + \frac{2}{in^3}[e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{4i}{n^3}\sin n\pi\right\} \\ &= \frac{2\cos n\pi}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

したがって $f(x)$ の複素フーリエ級数表現は

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

となる．

1.8 パーセバルの等式

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx \\
2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

周期 2π の関数の場合，

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

何を意味しているのか． $\Longrightarrow \cos, \sin$ の完全性．

完全性とは（教科書 p.24）

基底としてある直交関数系をとったとする．今の場合，$1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \cdots$．ここで，ある関数 $f(x)$ がすべての基底関数と直交するのが，$f(x) = 0$ だけのとき，この直交関数系は完全であるという．

完全ではない例：

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots\}$$

この基底関数（基底ベクトル）は直交系をなすが，例えば $f(x) = \cos x$ は，どの基底ベクトルとも直交する（係数 $b_n = 0, n = 1, 2, \cdots$）．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|b_n|^2\right) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

左辺は 0 となる．一方 $f(x) = \cos x$ なので，右辺は値をもつ．上の等式は実は成り立たない．ここから，この基底ベクトルの組が完全ではないことがわかる．