情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 9 回
2005 年 12 月 8 日

フーリエ変換

今日の目標

3. デルタ関数とは.
4. フーリエ変換とは.

来週

フーリエ変換の具体的な計算.

先週の話

複素フーリエ級数について理解し，簡単な関数について級数展開した.

3.1 デルタ関数

- 関数 $f(x)$：ある値 a に対して，ある値 $f(a)$ をあてがう.

  例 $\sin(\pi/2) = 1$

- 超関数：ある関数 $f(x)$ （テスト関数と呼ぶ） に対して，ある値 $f(a)$ をあてがう.

  例： デルタ関数 $\delta(x)$（ほかの関数の $x = 0$ の値を出させる作用素）

  【作用素： 一般に関数に関数を対応させる写像】

$$
\begin{aligned}
\text{定義：} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &= f(0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \text{テスト関数・超関数}\, dx &= \text{数値}
\end{aligned}
$$

  例： $f(x) = 1$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

  以下の表現はこれからよく使う.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

  δ 関数の変数がゼロとなるときの値を関数にあてがう.

- 例：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\ \delta(x)dx = \sin 0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\ \delta(x)dx = \cos 0 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\ \delta(x - \frac{\pi}{2})dx = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

  積分演算の形式を通じて，数値をあてがう.

デルタ関数 $\delta(x)$ とは．$x=0$ に面積 1 が集中した関数.
（深く考えるとおかしな関数ではある...）

$$\begin{cases} \delta(x) & = \; 0, \; x \neq 0 \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx & = \; 1, \; \epsilon \text{ は } \epsilon > 0 \text{ を満 たす任意の実数} \end{cases}$$

わけがわからなくなった場合は，デルタ関数のモデル関数を使って考える.

モデル関数

パラメータの値の極限においてデルタ関数となる関数

$$\lim_{a\to\infty} \mathcal{D}_a(x) = \delta(x)$$

言い換えれば

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{D}_a(x)dx = f(0)$$

の性質を満たす関数.

モデル関数の例 A

$$\mathcal{D}_a(x) = \begin{cases} a & (|x| \leq \frac{1}{2a}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2a}) \end{cases}$$

テスト関数 $f(x)$ との積の積分

$$I_a[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{D}_a(x)dx = \int_{-1/2a}^{1/2a} f(x)\ a\ dx = a\int_{-1/2a}^{1/2a} f(x)\ dx = af(c)\frac{1}{a} = f(c)$$

$f(c)$ は $f(x)$ の区間 $(-1/2a, 1/2a)$ における平均値（$-1/2a < c < 1/2a$）.

$$\lim_{a\to\infty} I_a[f(x)] = \lim_{a\to\infty} f(c) = f(0)$$

モデル関数は他にもある.（B,C,D 参照）

例 3.1：（今後使う公式）

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}d\lambda$$

まず $\int_{-a}^{a} \cos\lambda x d\lambda$ を計算してみる.

$$\int_{-a}^{a} \cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{x}[\sin\lambda x]_{-a}^{a} = \frac{1}{x}(\sin ax - \sin(-ax)) = \frac{2}{x}(\sin ax)$$

となる．したがってモデル関数は

$$\frac{\sin ax}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{e^{i\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2})d\lambda$$

と表現できる.

3.2 デルタ関数の基本的性質

δ A.　任意関数の積分表示

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x)\delta(\xi)d\xi \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \quad = f(x)$$

$f(x)$ は $f(\xi)\delta(x-\xi)$ のインパルス列がビッシリつまったものとみなせる．

δ B.　縮尺

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), c \neq 0$$

他にもいろいろ性質はあるが，必要になったときに説明をする．

4 フーリエ変換

今までは表現したい関数（信号）の周期が 2π であると仮定してきた．周期的でない信号を扱いたい場合，どうすればいいか．$\Longrightarrow$ 周期 $T = \infty$ と考えればよい．