

フーリエ変換

今日の目標

4. フーリエ変換とは .

来週

フーリエ変換の性質 .

先週の話

3. デルタ関数とは .

4 フーリエ変換

今までは表現したい関数 (信号) の周期が 2π であると仮定してきた . 周期的でない信号を扱いたい場合 , どうするればいいか . \Rightarrow 周期 $T = \infty$ と考えればよい .

復習 (基本周期 : x が 0 からどこまで変われば \cos の中身が 2π 変化するか)

基本周期	
$\cos x$	2π
$\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$	T

フーリエ級数からフーリエ変換へ .

$\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$ を使って関数 $f(x)$ を表現し , T を ∞ にする .

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{T}x} dx$$

$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ と書くと , これは

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

と書ける . いきなりではあるが , フーリエ変換の式と見比べてみる .

$$\text{フーリエ逆変換 : } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{フーリエ変換 : } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

フーリエ級数の式で , $\frac{1}{2\pi}$ との対応をつけるため , $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}, c_n = \frac{F(\omega_n)}{T}$ と書くと , これは

$$f(x) = \frac{T}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_n)}{T} e^{i\omega_n x} \Delta\omega = f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega$$

フーリエ変換の式は各基底ベクトル $e^{i\omega x}$ と関数 $f(x)$ の内積の式であり，角周波数成分を求める式になっている．フーリエ逆変換は，各基底ベクトル $e^{i\omega x}$ にその周波数成分の重み $F(\omega)$ をかけて足しあわせたもので $f(x)$ を再構成する式である．

複素フーリエ級数と，式を比較してみる．フーリエ逆変換はこれにそっくり． $n \rightarrow \omega, c_n \rightarrow F(\omega)$ になっている．離散変数が連続変数になっている．この辺りのことが教科書 p.68 に記述されている．

フーリエの積分定理は詳しくやる時間がないので，教科書を読んでおく．

一般に $F(\omega)$ は複素数値関数．

ω は連続角周波数（実数）．

フーリエ変換は，絶対積分可能

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

であるときに存在する．

フーリエ変換とフーリエ逆変換の大雑把な理解

1. 1対1の変換 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $-\infty < t, \omega < \infty$ （逆変換すればもとに戻せる）
2次元平面に漂う一本のヒモが，3次元空間に漂う一本のヒモに変換される．
横軸 x, ω は $-\infty$ から ∞ に走るのので， $\vec{f} \leftrightarrow \vec{F}$ という表現もできる．
2. 例：音声信号のような1次元の実数値関数 $f(t)$ は2次元平面上に1本の曲線として表現されている．その $f(t)$ フーリエ変換 $F(\omega)$ は，3次元空間中に漂う1本の曲線で表現される．線から線への一対一の写像になっている．
3. 同じ実体について（2つの）異なった表現方法がある：時間領域での表現 $f(t)$ と周波数領域での表現 $F(\omega)$ ．

4. フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad F(\omega) \text{ は通常，複素数値をもつ関数になる．}$$

5. フーリエ逆変換：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

6. 良く見れば行列との対応関係がとれる：フーリエ変換は線形代数で考えると行列とベクトルの積

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$\begin{bmatrix} F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega_1 x_1} & e^{-i\omega_1 x_2} & \dots & e^{-i\omega_1 x_n} \\ e^{-i\omega_2 x_1} & e^{-i\omega_2 x_2} & \dots & e^{-i\omega_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-i\omega_n x_1} & e^{-i\omega_n x_2} & \dots & e^{-i\omega_n x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

(この n^2 回の掛け算を $n/2 \log_2 n$ 回で済ませるのが高速フーリエ変換)

フーリエ変換の計算

教科書の図を注意してみる。 $f(x)$ は実数値関数であるので $-\infty < x < \infty$ で 2 次元の図で書ける。一方, $F(\omega)$ は複素数値関数であり, $-\infty < \omega < \infty$ で 3 次元のグラフなる。

1a)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-(a+i\omega)x} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-ax} e^{-i\omega x} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-ax} (\cos \omega x - i \sin \omega x) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \\ &= \frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)} \\ &= \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-a}^a (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx \\ &= 2 \int_0^a (\cos \omega x) dx \\ &= \frac{2}{\omega} [\sin \omega x]_0^a \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \omega a \\ &= \frac{2a}{a\omega} \sin \omega a = 2a \operatorname{sinc} a\omega \end{aligned}$$

偶然, $F(\omega)$ が実数値関数になっている。