情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 11 回
2005 年 12 月 22 日

フーリエ変換

今日の目標

4.4 フーリエ変換の性質を知る

次回

デルタ関数とフーリエ変換，線形システム

先週の話

3. フーリエ変換とは.

フーリエ変換の計算

※ 教科書の図を注意してみる． $f(x)$ は実数値関数であるので $-\infty < x < \infty$ で 2 次元の図で書ける．一方， $F(\omega)$ は複素数値関数であり， $-\infty < \omega < \infty$ で 3 次元のグラフなる．

$F(\omega)$ は一般に複素数なので $F(\omega)$ の図の書き方は 3 通りほどある．

1. 2 次元の図 2 枚：
   横軸： ω， 縦軸： Re $F(\omega)$
   横軸： ω， 縦軸： Im $F(\omega)$
2. 2 次元の図 2 枚：
   横軸： ω， 縦軸： 振幅スペクトル： $|F(\omega)|$
   横軸： ω， 縦軸： 位相スペクトル： Arg $F(\omega)$
3. 3 次元の 1 枚： 横軸： ω ． ×複素平面

用語

振幅スペクトル： $|F(\omega)|$
位相スペクトル： Arg $F(\omega)$
ω を固定して考えると， $F(\omega_0) = a + ib$ （a, b は実数で $a = a(\omega), b = b(\omega)$） とすると，

$$\mathrm{Arg}F(\omega) = \theta,\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

特に $F(\omega) = r\mathrm{e}^{i\theta}$ の場合，

$$\mathrm{Arg}F(\omega) = \theta$$

$$|F(\omega)| = r$$

これを使えば，2 次元のグラフが 2 枚描ける．

1a) では $F(\omega)$ のグラフが描かれていない！

$\boxed{\text{式にでてくる } x, \omega \text{ は常に } -\infty < x < \infty,\ -\infty < \omega < \infty \text{ であることを意識しよう}}$

計算例 2 ：sinc 関数についての解説.

計算例 3 ：ガウス分布型のフーリエ変換 $\Longrightarrow$ ガウス分布型

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

のフーリエ変換.

$$F(\omega) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega x} dx$$

この計算は大変．やりかたの一つが教科書に書いてある.

4.4 フーリエ変換の性質

- 線形性 (重ね合せの原理)

$$af(x) + bg(x) \ \rightarrow \ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{af(x) + bg(x)\} e^{-i\omega x} dx = aF[\omega] + bG[\omega]$$

  もっとも基本的な性質．フーリエ変換したい関数・信号が，フーリエ変換をしたらどうなるかわかっている関数・信号に分解できたら，解析はやさしくなる.

- 相似性

  信号 $f(x)$ のフーリエ変換した結果が $F(\omega)$ だとする．$f(cx)$，c は定数，と x 軸方向にそれぞれ縮小（拡大）した場合，そのフーリエ変換した結果は，$F(\omega)$ を ω 軸方向にについてそれぞれ拡大（縮小）したものになる.

$$f(cx) \ \rightarrow \ \frac{1}{|c|} F(\frac{\omega}{c})$$

  ここで c は定数．$c > 1$ のとき時間 (空間）領域では信号は縮む．フーリエ変換をおこない周波数軸 ω でみると広がる．$c = 2$ のように代入して図を書いてみればよくわかる．$c < 1$ のときは逆.

- 周波数シフト

$$\mathcal{F}[f(x) e^{i\omega_0 x}] \ = \ F(\omega - \omega_0)$$

  これは周波数スペクトルを ω_0 だけ右にずらす操作．音声などの信号を想像すると，実数に複素数を掛け算するから実体としてはなんだかよくわからなくなる，実は，この性質は，無線通信において使用されている．信号 $f(t)$ に単に $e^{i\omega_0 t}$ を掛けた $f(t)e^{i\omega_0 t}$ では複素数の信号となってしまい実現できない．そこで cos や sin がこの形 $(e^{i\omega_0 t})$ の和や差で表現できることを思いだす．具体的には，もとの信号 $f(t)$ に，たとえば，$f(t) \cos t(\omega_0 t) = 1/2 f(t)(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$

と掛け算する．これを変調という (教科書 p.169 参照)．復調はどうするか．実は，変調のときに使用した信号 (搬送波という．ここでは $\cos(\omega_0 t)$）と同じものを掛けてやれば，もとにもどる．その際，周波数領域でみると $2\omega_0$ 倍,$-2\omega_0$ 倍のところにもでてしまう．それはローパスフィルターで高周波成分を取り除いてやればいい．p.169-171 参照.

- 変数シフト (時間シフト，空間シフト）

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= F(\omega) \\ \mathcal{F}[f(x-x_0)] &= e^{-i\omega x_0}F(\omega)\end{aligned}$$

これは重要．代数的にわかりやすい．複素数 $e^{-i\omega x_0}$ を掛け算することは，相手 $(F(\omega))$ の大きさを 1 倍し，時計回りに ωx_0 だけ回転させることである．つまり，$f(x)$ の時間を横にずらした信号 $f(x-x_0)$ をフーリエ変換しても，その位相スペクトルは変化するが，振幅スペクトルは変化しない．音声信号の解析には，$F(\omega)$ の振幅 (絶対値）がよく使われるが，いつしゃべろうとも，振幅スペクトルは変化しない．これがフーリエ変換の性質で，音声信号の解析によくフーリエ変換が使われる理由である．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \text{ のとき}$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx$$

をもとめる．$x - x_0 = t$ とおくと，

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t+x_0)}dt$$

$$G(\omega) = e^{-i\omega x_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega x_0}F(\omega)$$

複素数の掛け算を思い出す．$e^{-i\omega x_0} = \cos(\omega x_0) - \sin(\omega x_0)$，$|e^{-i\omega x_0}| = 1$，$\mathrm{Arg}\{e^{-i\omega x_0}\} = -wx_0$

- 微分，高階微分

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= i\omega F(\omega) \\ \mathcal{F}[f^{(n)}(x)] &= (i\omega)^n F(\omega)\end{aligned}$$

この性質のおかげで微分方程式が代数方程式になる.

- 対称性

$$g(x) \equiv F(x) \quad \rightarrow \quad G(\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

フーリエ変換したい関数を $g(x)$ とする．この $g(x)$ が，ある関数 $f(x)$ をフーリエ変換した結果 $F(\omega)$ と同じ形になっているとき，つまり $g(x) = F(x)$ のとき，わざわざ定義にもどって計算しなくてもいい.

- 共役性

式で書くとあたりまえのこと．どういう御利益があるかは不明.