情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 12 回
2006 年 1 月 12 日

フーリエ変換

今日の目標

4.5 デルタ関数とフーリエ変換
8.1 線形時不変システム

次回

8.2 インパルス応答

先週の話

フーリエ変換の性質

4.5 デルタ関数とフーリエ変換

- デルタ関数 $\delta(x)$ とは（復習）.

  デルタ関数は $x = 0$ に面積 1 が集中した関数.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$\delta(x) = 0, x \neq 0$$

【解説】$x = 0$ 以外では値 0 をとる関数である．このような関数を 0 を含む区間で積分すると，普通の関数であれば 0 となる．ところがデルタ関数はそうはならない．そうならないことが定義 $\int_{\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ である．$\delta(0)$ の値は無限大のようなものであるが，特定することはできない．この後，$2\pi\delta(x)$ などという表現も出現する．おかしい点もでてくると思うが，そうなると思って話を進めても何の不都合もおこらない.

- デルタ関数のフーリエ変換

  フーリエ変換は関数から関数への写像で区分的なめらかでかつ絶対積分可能な関数であればフーリエ変換 (関数から関数への一対一写像）できた．デルタ関数はその定義からして絶対積分可能である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{1}$$

デルタ関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta(x)] &= && (2)\\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx && (3)\\
&= e^{-i\omega x}|_{x=0} && (4)\\
&= 1 && (5)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \quad = \quad f(0) \tag{6}$$

というデルタ関数の性質を用いた．次に，この結果をフーリエ逆変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{7}$$

できたとするとデルタ関数にもどるはずなので，

$$\begin{aligned} \delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\delta(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega && (8) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega && (9) \end{aligned}$$

となる．これはデルタ関数の積分を使った表現と思っていい．複素指数関数を $-\infty$ から ∞ まで積分するとデルタ関数の 2π 倍

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \quad = \quad 2\pi\delta(x) \tag{10}$$

となる (これは定義のようなものと思えばいい）．次に，デルタ関数は偶関数という性質 $\delta(x) = \delta(-x)$ を使うと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega \quad = \quad 2\pi\delta(x) \tag{11}$$

も成り立つ．この二つの式は今後よく使うようになる．

- 定数 1 のフーリエ変換

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1] &= && (12) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}dx = 2\pi\delta(\omega) && (13) \end{aligned}$$

デルタ関数をフーリエ変換したら 1 になった．その知識があれば，1 をフーリエ変換すると，デルタ関数 (の定数倍）になることは，フーリエ変換の性質 (フーリエ変換の対称性と教科書には書かれている）を知っていればわかる．この式は先にもでてきたが，積分表現をつかったデルタ関数の定義だと思えばいい．

- 余弦関数，正弦関数のフーリエ変換

まず $e^{-i\omega_0 x}$ のフーリエ変換を計算しておこう．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-i\omega_0 x}] &= && (14) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 x}e^{-i\omega x}dx && (15) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_0+\omega)x}dx && (16) \\ &= 2\pi\delta(\omega_0+\omega) && (17) \end{aligned}$$

最後の等号は式 (10) の結果をもちいた．この結果を用いて，

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 x] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}}{2}\right] \tag{18}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}] \tag{19}$$

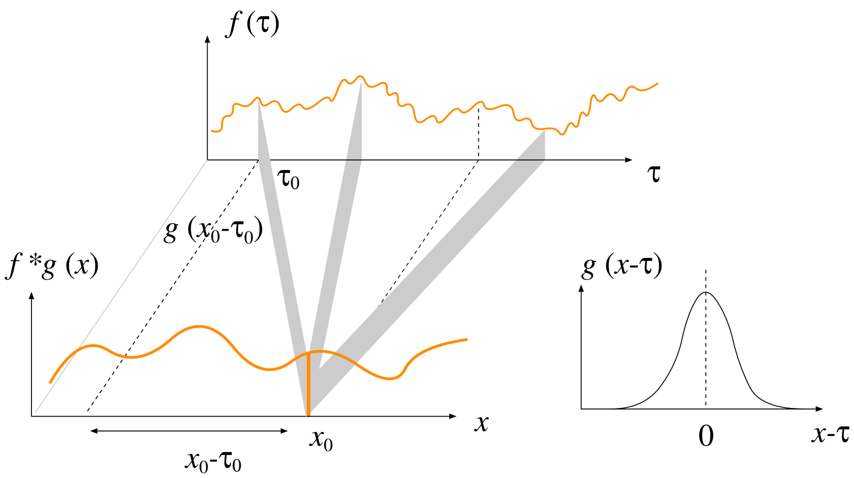
$$= \pi(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)) \tag{20}$$

となる．

- 周期的デルタ関数のフーリエ変換

  周期的デルタ関数のフーリエ変換は周期的デルタ関数となる．

4.6 たたみこみ



$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これが「たたみこみ」の定義である．この式を見ただけでは，その意味はわかりにくいし，「たたみこみ」という言葉がその意味を直感的には伝えてくれない．「たたみこみ」の意味は「8. 線形システムの解析」で明確になるが，一つの解釈として，2 つの信号 $f(x), g(x)$ があったときに，どちらかを重みの係数だと考えればわかりやすい．図では $f(x)$ を信号，$g(x)$ を重みであると解釈している．たたみこんで得られた関数 $f*g(x)$ は各場所 (時間） x において，場所 $f(\tau)$ の信号を $g(x-\tau)$ の重みを掛け算して $\tau=-\infty$ から ∞ まで足す操作をおこなった結果である．$f(x)$ を重みの係数だと思ってもよく，

$$f*g(x) = g*f(x)$$

が成り立っている．今の段階では，何がなんだかわからないかもしれない．ここでは，こういう説明で勘弁してもらいたい．重要なことは，

$$f*g(x) \rightarrow F(\omega)G(\omega)$$

という，2 つの関数をたたみこみんだ関数のフーリエ変換は，それぞれの関数をフーリエ変換したものを掛け算した結果と同じになることである．

8.1 線形時不変システム

- システムとは：$f(t)$ という信号が入力された場合，信号 $g(t)$ を出力する装置のこと．

$$S: f(t) \quad \to \quad g(t) = S[f(t)], \;\; -\infty < t < \infty \tag{21}$$

（システムとは何か，ということを深く考えることはしない）

- システム解析の目的： 入力 $f(t)$ から出力 $g(t)$ を予測すること．

それには，あらかじめ何か信号を入力しておいて，どんな出力がでるか観測する必要がある．ありとあらゆる入力をシステムに入力し，出力を観測すれば，システムの特性はわかるが，それは大変であるし，なにより不可能である．

実は，ある入力に対する出力さえ調べておけば，システムの特性がすべてわかる．

$\Longrightarrow$ その入力がインパルス．

- 線形システムの定義 式 (8.2)

$$S[f_1(t)] \;=\; g_1(t) \tag{22}$$

$$S[f_2(t)] \;=\; g_2(t) \text{ とすると} \tag{23}$$

$$S[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] \;=\; a_1 S[f_1(t)] + a_2 S[f_2(t)] \tag{24}$$

$$= \; a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \tag{25}$$

異なる入力が互いに影響をあたえることはない．出力は，それぞれの出力の重ね合せ．したがって，入力信号をあらかじめ取り扱いやすい特別な信号の和に分解して表現しておけばいい．では，その特別な信号とは何か．

- 線形システムの例，線形ではないシステムの例

- 時不変システムの定義 式 (8.3)

$$g(t+a) \;=\; S[f(t+a)] \tag{26}$$

入力のタイミングがずれたら，その分，出力のタイミングも同じだけずれる，ということ．ある同じ入力に対し，今日の反応と明日の反応が変わらないということ．相手が機械であれば，いたって自然 (相手が人間の場合，そうはいかない）.

- 因果性について

$$Sf(t) \;=\; 0(t < t_1) \text{ のとき} \tag{27}$$

$$\text{必ず } g(t) \;=\; S[f(t)] = 0(t < t_1) \tag{28}$$

音声信号への応答や，車のアクセルの踏み込みへの応答などを考えた場合，システムの出力が，その時間までの入力信号にのみ依存し，未来の入力に依存することはない．これが因果性．空間的な相互作用を考える場合は，因果的でないと考える．講義では $f(t)$ を時間信号だと考え，因果的なシステムだけを考える．