学籍番号：

2005 年 10 月 3 日
線形代数

名前：＿＿＿＿＿＿＿＿ 得点：＿＿＿＿

小テスト： 解答例

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ に対して，次の各問いに答えよ．

1. $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$ となる $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で，$\vec{0}$ でないものが存在するような実数 α は 2 つある．それらの値を求めよ．

   $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$ は $(\alpha E - A)\vec{x} = \vec{0}$ と同値である．$(\alpha E - A) = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 3 \\ -4 & \alpha + 5 \end{pmatrix}$ であるから，α の満たすべき条件は，$(\alpha - 2)(\alpha + 5) + 12 = 0$

   $$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha + 2)(\alpha + 1) = 0 \qquad \therefore \alpha = -1, -2$$

2. (1) で求めた α の値を $\alpha_1, \alpha_2(\alpha_2 < \alpha_1)$ とおく．$A\vec{u} = \alpha_1\vec{u}, A\vec{v} = \alpha_2\vec{v}$ となる $\vec{0}$ 以外のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ をそれぞれ 1 つずつ求めよ．

   (1) より $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$ である．$\vec{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ おくと，$(\alpha E - A)\vec{u} = \vec{0}$ より

   $$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{たとえば}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   同様に $\vec{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{t}}$ おくと，$(\alpha E - A)\vec{v} = \vec{0}$ より

   $$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{たとえば}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. (2) で求めた $\vec{u}, \vec{v}$ を横に並べた行列を P とおく．すなわち $P = (\vec{u}, \vec{v})$．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

   (2) より $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおける．すると $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$．よって

   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

4. A^n を求めよ.（正確な答えはともかく，まず計算を導出する式を示せ）

   $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$．したがって (3) の結果より

   $$\begin{aligned} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \cdot (-2)^n \\ (-1)^n & 4 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1)^n - 3 \cdot (-2)^n & -3 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-2)^n \\ 4 \cdot (-1)^n - 4 \cdot (-2)^n & -3 \cdot (-1)^n + 4 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

※ 講義のページ：http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005la/index.html