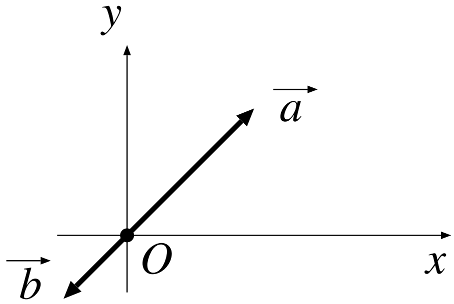
線形代数 （伊達担当） 確認問題（2005 年 12 月 5 日）

学籍番号：760 ＿ ＿ ＿ ＿ 0 名前：**解答 例**

【問 1】（線形独立性） [10 点]
以下に，2 次元平面の座標軸と原点 O を書き，<u>線形従属</u>（一次従属）なベクトル 2 つ（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ ）を描きなさい．

<u>例</u>：



【問 2】 （行列とベクトルの掛け算）[20 点]

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ を計算せよ．ただし $^{\mathrm{T}}$ は転置を意味する．

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \underline{8x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2}$$

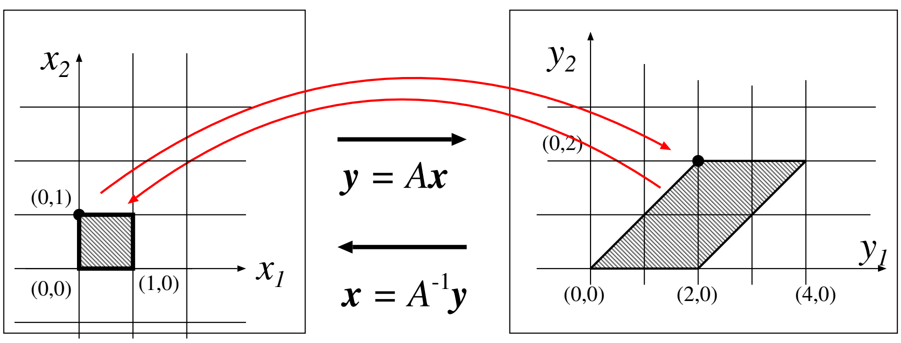
【問 3】 （行列式）[20 点]

次の文章中の空欄を適切な数字または文字で埋めなさい．

単位行列 E の行列式は (1) <u>1</u> である．行列 A を掃き出し法で変形していくとき，一つの行を d 倍すると行列式の値は (2) <u>d</u> 倍される．また，ある行に他の行の d' 倍を加えると行列式は (3) <u>1</u> 倍される．さらに行と行を一回交換すると行列式は (4) <u>-1</u> 倍される．

行列式 $|A|$ には「面積（体積）拡大率」という意味がある．これを図を書くなどして説明せよ．

例えば $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると，$|A| = 4$．これは元の空間での領域が移った先では $|A| = 4$ 倍されているということ．ちなみに逆行列 A^{-1} の行列式は $1/4$ になる．



【問 4】（連立一次方程式）[20 点]

$$\begin{cases} x+2y-5z &= -29 \\ -x-y+2z &= 9 \\ x-y+2z &= 15 \end{cases}$$

1) この連立一次方程式を 2 本のベクトルと一つの行列を使い表現しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2) 方程式の解を掃き出し法により求めなさい（計算間違いはもったいないので検算する）．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -29 \\ -1 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 15 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ 第 1 行を第 2 行に加え，第 1 行 $\times(-1)$ を第 3 行に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -29 \\ 0 & 1 & -3 & -20 \\ 0 & -3 & 7 & 44 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ 第 2 行 $\times(-1)$ を第 1 行に加え，第 2 行 $\times 3$ を第 3 行に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\underline{x=3 \quad y=4 \quad z=8}$

【問 5】（行列式と逆行列．後半は忍耐力が必要）[30 点]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．（A^{-1} の要素はどれも整数ではない）

【ヒント： まず $\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots \\ 0 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$ の形に変形し，行列式を求め，つぎに逆行列を求める.】

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ここまでで $|A|$ が計算できる． $\underline{|A| = 1 \times (-2) \times 2 = -4}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{1} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-8+21}{4} & \frac{4-3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{4} & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{7}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$