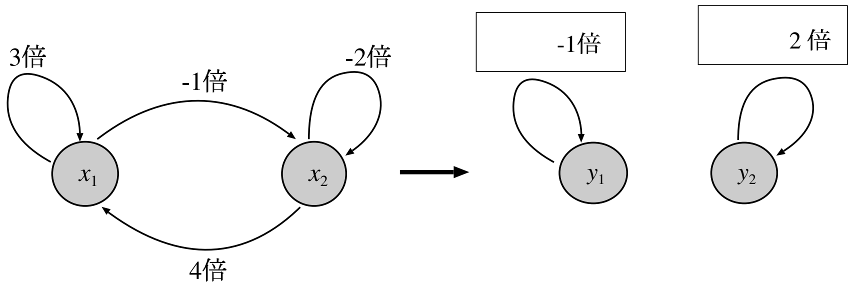
学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005 年 12 月 12 日

線形代数　　　　　　　　　名前：　　　　　　　　　得点：

小テスト：解答例

【行列の対角化】 下図のようなシステムがある．このシステムの未来の状態が計算しやすくなるよう変換行列 P を求めなさい．ここで P は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換行列．空欄も埋めること．



このシステムは $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と状態を更新する．$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ で表すため，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}' = P\boldsymbol{y}'$ を代入すると $P\boldsymbol{y}' = AP\boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{y}' = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$ ここから $P^{-1}AP$ が対角行列 Λ になるような P を求めればよいことがわかる．具体的には，行列 A の固有値 λ_1, λ_2 固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を求めればよい，固有ベクトルを並べた行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$ が求める変換行列であり，Λ の対角成分が λ_1, λ_2 となる．

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \to \ A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{固有方程式：} \ \phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \qquad (\lambda - 3)(\lambda + 2) + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\text{固有値} \qquad \lambda = -1, 2$$

$$\lambda = -1 \text{ の場合} \qquad \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{これを満たす } x_1, x_2 \text{が固有ベクトル．例えば} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

$$\lambda = 2 \text{ の場合} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda = 4 \text{ に対応する固有ベクトル．例えば} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2$$

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

変換行列 P は一つには定まらないが，例としては $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ がある．

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005la/index.html`