学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2006 年 1 月 18 日
線形代数　　　　名前：＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト：解答例

【直交行列による合同変換】

行列 $F = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ を適当な直交行列 P により，対角行列に合同変換せよ．
（F の固有値，固有ベクトルを求め，P を作り，合同変換する）

$$F\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \to\ F\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda E - F)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \lambda-6 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

固有方程式： $\phi(\lambda) = |\lambda E - F| = 0 \qquad (\lambda-6)(\lambda-3)-4=0$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 14 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-7) = 0$$

固有値　$\lambda = 2, 7$

$\lambda = 2$ の場合　$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

これを満たす x_1, x_2が固有ベクトル．例えば　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

であるが，長さが 1 になるようにして　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1$

$\lambda = 7$ の場合　$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル．例えば　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2$

$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, P^{\mathrm{t}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{\mathrm{t}}FP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のとき，$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x}$ と $f' = \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}F'\boldsymbol{y}$ の値を計算し，$f = f'$ であることを確認せよ． ここで ${}^{\mathrm{t}}$ は転置を意味し，P は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換行列である．

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{26}$ ，　$\boldsymbol{y} = P^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ より

$f' = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 28 \end{bmatrix} = \frac{130}{5} = \underline{26}$

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005la/index.html`