学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2006 年 1 月 23 日
線形代数　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿　得点：＿＿＿＿＿

小テスト：解答例

【2 次曲線の主軸変換】

つぎの二次曲線はどんな図形を表すか．　$5x^2+4xy+2y^2=1$

左辺は x と y の 2 次形式であるので，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$F$ は対称行列として，左辺を $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ とおくと，$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x}$ と書ける．$F=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ とすると

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ax+by\\bx+cy\end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

より $a=5,b=2,c=2$ であることがわかり，問題の二次曲線は $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=1$ と書ける．行列 F の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,(\lambda_1>\lambda_2)$，固有ベクトルを求め，合同変換 $P^{\mathrm{t}}FP$ を行なう．

$$F\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\to\ F\boldsymbol{x}=\lambda E\boldsymbol{x}\qquad\begin{bmatrix}5&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$(\lambda E-F)\boldsymbol{x}=0\qquad\begin{bmatrix}\lambda-5&-2\\-2&\lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\text{固有方程式：}\ \phi(\lambda)=|\lambda E-F|=0\qquad(\lambda-5)(\lambda-2)-4=0$$

$$\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-6)(\lambda-1)=0$$

$$\text{固有値}\qquad\lambda_1=6,\lambda_2=1$$

$\lambda=6$ の場合 $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$ これを満たす長さが 1 の固有ベクトルを求める．$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{e}_1$

$\lambda=1$ の場合 $\begin{bmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$ これを満たす長さが 1 の固有ベクトルを求める．$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\boldsymbol{e}_2$

$P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}$ とおき,$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=P\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ をもとの二次曲線の式に代入して

$5(2x'+y')^2++4(2x'+y')(x'-2y')+2(x'-2y')^2=5\Longrightarrow 6x'^2+y'^2=1$

$\left(\dfrac{x'}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2+y'^2=1$ これは長軸の半径が 1，短軸の半径が $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ の楕円である．

【楕円であることがわかれば，固有値を計算しただけで，短軸の長さが $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ 長軸の長さが $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ であることがわかる．$(\lambda_1>\lambda_2)$】

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005la/index.html`