情報システム工学科
伊達 章

講義の全体像

講義について

- 担当教員： 伊達 章
- 連絡先： A-423，date@cs.miyazaki-u.ac.jp， 内線 7986
- 成績の評価方法：期末試験 80%，小テスト（演習問題） 20%
  - ・講義時間内にできなければ，次の時間までに A-423 まで提出
- 内容に関する質問について：
  - ・オフィスアワー以外も可能な限り受け付けます
  - ・講義中の質問も歓迎 → ほかの人の理解の助けにもなる

講義全体の内容 （この科目の内容は深い）

- 行列式の余因子展開，余因子行列，逆行列
- 行列の基本変形 （連立 1 次方程式）
- 固有値・固有ベクトル ←理工系数学の華である線形代数の中心

重要なテーマ：情報表現と計算の関係

- 物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる

今日はこれについての簡単な説明をおこなう

何の役にたつのか

- 音・音声の表現
- 時系列信号の解析
- 画像の表現

関連する科目

- 応用数学 2，線形システムと信号処理，確率論と情報理論，パターン認識...

復習：身につけているべき概念

- ベクトル： 内積，線形結合，線形独立 ↔ 線形従属，基底ベクトル（1 章）

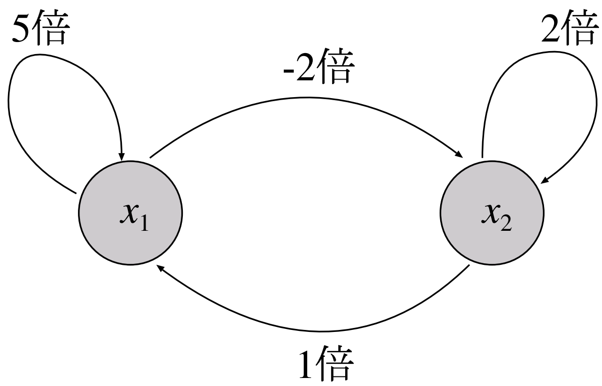
（※ 「1 次」と「線形」は同じ意味）

- 行列の演算 （2 章）
- 行列式 （3 章）

予習：これから身につける概念

- 逆行列 （4 章）
- 掃き出し法（5 章．行列の基本変形）
- 固有値・固有ベクトル，複素数を使った回転の表現（6 章）

問題



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

n 回更新した後の状態を求めたい

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}'' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}''' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{(n)} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

できるところまで計算してみる

復習： 基底ベクトルによる表現

- 状態 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$

別の基底で表現してみる

- 状態 $\boldsymbol{x} = y_1 \boldsymbol{e}'_1 + y_2 \boldsymbol{e}'_2$
- 同じものに対しても，表現の仕方は無数にある！

もう一度計算

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = A(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) &= x_1 A\boldsymbol{e}_1 + x_2 A\boldsymbol{e}_2 \\
\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' &= x_1 A^2\boldsymbol{e}_1 + x_2 A^2\boldsymbol{e}_2 \\
\boldsymbol{x}''' = A\boldsymbol{x}'' &= x_1 A^3\boldsymbol{e}_1 + x_2 A^3\boldsymbol{e}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{(n)} = A\boldsymbol{x}^{(n-1)} &= x_1 A^n\boldsymbol{e}_1 + x_2 A^n\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

この計算が大変であった．別の表現を考えよう．適当な基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ で

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = A(y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2) &= y_1 A\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A\boldsymbol{e}'_2 \\
\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' &= y_1 A^2\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A^2\boldsymbol{e}'_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{(n)} = A\boldsymbol{x}^{(n-1)} &= y_1 A^n\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A^n\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}$$

と表現する．計算が面倒な事情は変わっていないと思うかもしれない....

基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ でシステムの状態を表現

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = A(y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2) &= y_1 A\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A\boldsymbol{e}'_2 \\
\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' &= y_1 A^2\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A^2\boldsymbol{e}'_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{(n)} = A\boldsymbol{x}^{(n-1)} &= y_1 A^n\boldsymbol{e}'_1 + y_2 A^n\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}$$

計算が面倒な事情は変わっていないと思うかもしれないが，実は

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{e}'_1 &= \lambda_1\boldsymbol{e}'_1 \\
A\boldsymbol{e}'_2 &= \lambda_2\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}$$

となるように基底ベクトルを選んでいれば話は簡単．

行列 A による変換は単に定数を掛ければいいだけの話

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ が

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e}_1' &= \lambda_1 \boldsymbol{e}_1' \\ A\boldsymbol{e}_2' &= \lambda_2 \boldsymbol{e}_2' \end{aligned}$$

を満たしていれば，システムの状態は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= y_1 A\boldsymbol{e}_1' + y_2 A\boldsymbol{e}_2' = y_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1' + y_2\lambda_2\boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' &= y_1 A\lambda_1\boldsymbol{e}_1' + y_2 A\lambda_2\boldsymbol{e}_2' = y_1\lambda_1^2\boldsymbol{e}_1' + y_2\lambda_2^2\boldsymbol{e}_2' \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}^{(n)} = A\boldsymbol{x}^{(n-1)} &= y_1 A^n\boldsymbol{e}_1' + y_2 A^n\boldsymbol{e}_2' = y_1\lambda_1^n\boldsymbol{e}_1' + y_2\lambda_2^n\boldsymbol{e}_2' \end{aligned}$$

となる．計算がとても簡単になった． めでたし，めでたし．

λ_1, λ_2 を行列 A の固有値，$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ を行列 A の固有ベクトルと呼ぶ.

線形変換の固有値・固有ベクトル

- 状態 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
  スペースがもったいない場合 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ と書く（$^{\mathrm{t}}$ は転置）.
- 時間が 1 たつと状態が $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$ に変わる
- $\boldsymbol{x}$ が行列 A で変換する前と後で方向が変わらなければ

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

  ：

- λ $\cdots$ 行列 A の 固有値
  $\boldsymbol{x}$ $\cdots$ 行列 A の 固有ベクトル

固有値，固有ベクトルの具体的な計算

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \to \ A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \quad & \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \quad & \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \text{固有方程式：}\ \phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \quad & (\lambda - 5)(\lambda - 2) + 2 = 0 \\ & \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \\ & (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \\ \text{固有値} \quad & \lambda = 3, 4 \end{aligned}$$

固有値，固有ベクトルの具体的な計算：つづき

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 3$ の場合 $\qquad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

これを満たす x_1, x_2が固有ベクトル $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}'_1$

$\lambda = 4$ の場合 $\qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\lambda = 4$ に対応する固有ベクトル $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}'_2$

基底ベクトルによる表現

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$
- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = AP\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda\boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^2\boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^n\boldsymbol{y} = P\Lambda^nP^{-1}\boldsymbol{x}$

これらの式の意味を考えよう．

意味

$\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n\boldsymbol{x} = y_1A^n\boldsymbol{e}'_1 + y_2A^n\boldsymbol{e}'_2 = y_1\lambda_1^n\boldsymbol{e}'_1 + y_2\lambda_2^n\boldsymbol{e}'_2$

状態 $\boldsymbol{x}$ を変換した $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を考えればよい．

y_1 は状態の和の符合を反転したもの $-(x_1 + x_2)$ であり，y_2 は $2x_1 + x_2$．

- $\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^n \boldsymbol{y} = P\Lambda^n P^{-1} \boldsymbol{x}$

P や P^{-1} は $\boldsymbol{x}$ 座標系と $\boldsymbol{y}$ 座標系の座標値の変換・逆変換を意味している.

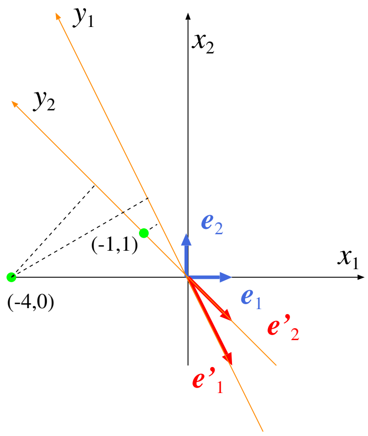
P は固有ベクトルを並べた行列. Λ は対応する固有値を対角上に並べた行列

意味

- $\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^n \boldsymbol{y} = P\Lambda^n P^{-1} \boldsymbol{x}$
- $A = P\Lambda P^{-1} \to \Lambda = P^{-1}AP$ （行列の対角化）
- $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$
- P や P^{-1} は $\boldsymbol{x}$ 座標系と $\boldsymbol{y}$ 座標系の座標値の変換・逆変換を意味している.

P は固有ベクトルを並べた行列. Λ は対応する固有値を対角上に並べた行列

意味：つづき



どこに写るか，絵で計算

意味：つづき

- $\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n \boldsymbol{x} = y_1 \lambda_1^n \boldsymbol{e}'_1 + y_2 \lambda_2^n \boldsymbol{e}'_2 = y_1 3^n \boldsymbol{e}'_1 + y_2 4^n \boldsymbol{e}'_2$
- n が大きくなると，$\boldsymbol{x}^n$ は $\boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 方向の大きな値になることがわかる.