情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 2 回
2005 年 10 月 17 日

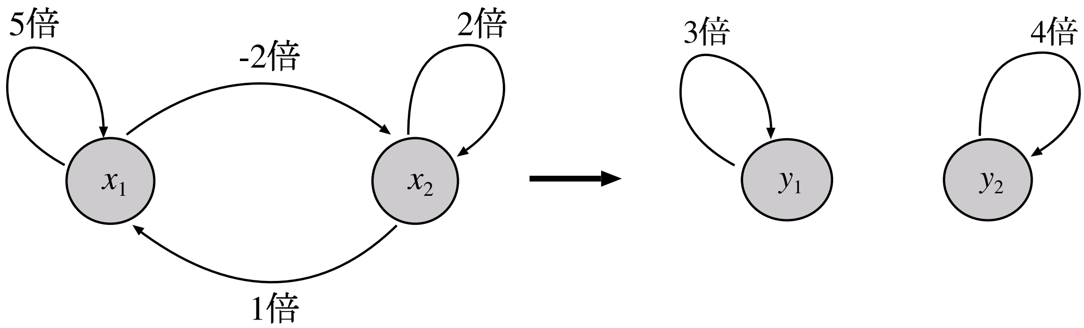
連立方程式，行列の基本変形

今日の目標

「ガウスの消去法」（掃き出し法，sweeping-out method）を理解する．これは行列の同値変形．教科書によっては第一章に解説がある．

先週の話. 線形代数の一つの山場：固有値，固有ベクトル． → これは後の回で詳しく扱う．

問題の本質：基底を取り替えれば扱いやすくなる



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

n 回更新した後の状態を求めたいが，このままでは計算が困難．

1. $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ で初期値を y 座標系の表現に変換し，n 乗を考える．
2. $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ でもとの x 座標系に戻す．

行列 P は，行列 A の固有ベクトルを並べたもの．このように固有ベクトルを基底ベクトルとして用い，物事を表現して考えると便利．

問題：基底の線形結合

2 次元平面上に二本のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が与えられている（$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{R}^2$）．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. 任意の $\boldsymbol{v}$ （$^\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^2$）を表現することができるか．
2. 係数が一意に決まるか．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表現する．たとえば $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{v} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

すべてを成分で書く.

$$\begin{cases} -5 & = & x_1 + 2x_2 \\ 4 & = & -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \tag{3}$$

未知数が x_1, x_2 の 2 個，方程式が 2 個の連立方程式.

<u>基底の話 → 連立方程式の話.</u>

この式を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在すれば，どんな $\boldsymbol{v}$ でも，こういう話になる.

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 \tag{5}$$

$$\begin{cases} v_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ v_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{6}$$

$\boxed{\text{一般には } n \text{ 元連立一次方程式}}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & v_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & v_m \end{cases} \tag{7}$$

未知数は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の n 個．方程式の個数は m 個.

例.

$$\left\{\begin{array}{rrcrl} x & -2y & = & -5 & \cdots ① \\ 2x & +3y & = & 4 & \cdots ② \end{array}\right.$$

$$② - ① \times 2 \qquad\qquad \begin{array}{rcrl} 7y & = & 14 & \cdots ③ \\ y & = & 2 & \cdots ③' \end{array}$$

$$① + ③' \times 2 \qquad\qquad x = 1 \cdots ④$$

方程式を解く矢印．本来は同値変形.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -2y & = & -5 \\ 2x & +3y & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcr} x & -2y & = & -5 \\ & 7y & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcr} x & -2y & = & -5 \\ & y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcr} x & & = & -1 \\ & y & = & 2 \end{array}\right.$$

与えられた式と同値なもっとも単純な表現に変形する.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 1x & -2y & = & -5 \\ 2x & +3y & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcr} 1x & -2y & = & -5 \\ 0x & +7y & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcr} 1x & -2y & = & -5 \\ 0x & +1y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcr} 1x & +0y & = & -1 \\ 0x & +1y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \iff \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

これが連立一次方程式を解くことに他ならない.

基本変形

1. ある行に 0 でない数をかける.
2. ある行に他のある行の何倍かを加える.
3. ある行と他のある行を交換する.

与えられた係数行列をよい形（単位行列）に変えることが連立一次方程式を解くことに対応（実は，これはそのまま逆行列を求める計算に使える）.