

## 行列の基本変形による逆行列の求め方

### 今日の目標

行列の基本変形で逆行列を求めることができる。

### 先週の話

1. 基底による表現の話：任意のベクトルを基底を使って表現できるか。
2. 連立一次方程式を解く話。
3. 与えられた係数行列をよい形（単位行列）に変える話。
4. 基本変形により逆行列を求めることができる（今日の話）。

1 → 2 → 3 → 4 と話は進む

### 基本変形

1. ある行に0でない数をかける。
2. ある行に他のある行の何倍かを加える。
3. ある行と他のある行を交換する。

### 問題：行列の掃き出し法と逆行列

行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めたい。どうすればいいか。行列  $A$  の逆行列とは

$$AA^{-1} = I \quad (1)$$

となるような行列  $A^{-1}$  のことであった。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

のとき，上の式 (1) は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書ける。文字の使い方にも慣れておこう。 $x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  と書くと，式 (2) は

$$A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。これは

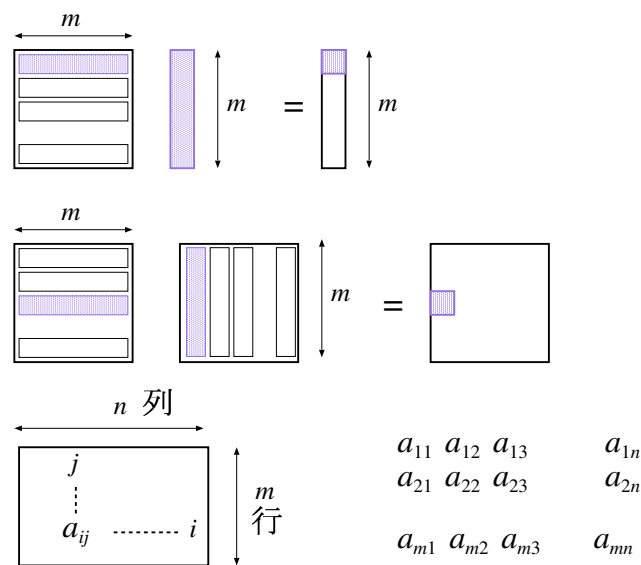
$$\begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \end{cases} \quad (3)$$

という二つの式に分解できる．成分で書くと

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

となる．つまり式 (1) は 2 つの連立一次方程式をまとめたものと考えることができる．

視覚イメージ：行列の掛け算



こういうのは，視覚イメージで焼き付けておく．

1. 横ベクトル × 縦ベクトルが数．
2. 正方行列の掛け算の場合，前側の行列を横ベクトル，後ろを縦ベクトルの集まりだ考える．掛け算した結果も縦ベクトルの集まりと考える．

連立一次方程式を掃き出し法で解く方法は既に習った．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{第 1 行} \times (-1) \text{ を第 2 行に加える} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

第 2 行  $\times (-3)$  を第 1 行に加える  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 4, y_1 = -1$  (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{第 1 行} \times (-1) \text{ を第 2 行に加える} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 2 行  $\times (-3)$  を第 1 行に加える  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -3, y_2 = 1$  (6)

これが

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

の解である．これは，もともと

$$AA^{-1} = I \quad (8)$$

という  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めることが目的であった．

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である．確かに

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

となっている．

もう気づいたかもしれないが，実は，なにも 2 つの連立 1 次方程式に分けて計算する必要はなく，横に並べれば同時に計算できる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{第 1 行} \times (-1) \text{ を第 2 行に加える} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\text{第 2 行} \times (-3) \text{ を第 1 行に加える} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

これまで行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めるときは， $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$  つまり

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4 - 3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

やサラスの方法を使っていたが，それらは行列の次元が大きくなると，計算がとても大変になる．ここで示した掃き出し法を使えば，それらの方法と比較して逆行列を効率的に計算できる．

一般には  $n$  元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = v_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = v_m \end{cases} \quad (10)$$

未知数は  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の  $n$  個．方程式の個数は  $m$  個．

一般の場合

計算が続けられなくなれば，この方程式はただ一通りの解を定めることができないこと，つまり，その行列は正則ではないことを意味している．

例 .

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$  の逆行列を掃き出し法で求めてみる .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{第 1 行} \times (-3) \text{ を第 2 行に加える} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

というわけで , 右側を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形にすることはできない . この行列  $A$  の逆行列を求めることは

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

こういう二つの連立一次方程式を解くことに対応していた . この二つの式を図に書くと , 平行線になっていることがわかる .

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 1 \\ 3x_1 - 6y_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

この式に着目すると ,

$$0y_1 = -3$$

これを満たす  $y_1$  というのは存在しない . 平行線なので , 解がないのはあたりまえである . 結局 , この行列には , 逆行列が存在しない .

$$Ax = b \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (14)$$

これを掃き出し法で , 解いてみる .