情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 4 回
2005 年 10 月 31 日

各基本変形に対応する行列（行基本行列）について

今日の目標

1. 各基本変形に対応する行列について（宿題の解説）
2. 線形写像： たちの良い行列（対角行列）とたちの悪い行列（0 行列など）

次週：掃き出し法により行列式 (determinant) を求める
行列式の復習を含む）

先週までの話

基本変形により連立一次方程式を解く（先々週）.
基本変形により逆行列を求める（先週）.

基本変形

1. ある行に 0 でない数をかける.
2. ある行に他のある行の何倍かを加える.
3. ある行と他のある行を交換する.

行基本行列（教科書 p.108）

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

について考える.

- 例 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

行列 A の前に $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を掛ける $\rightarrow$ 第 1 行が s 倍される.

- 例 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 \cdot 5 - 3 & 2 \cdot 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

行列 A の前に $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$ を掛ける $\rightarrow$ 第 1 行を s 倍したものを第 2 行に加える.

- 例 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 A の前に $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を掛ける $\to$ 行が入れ替わる

- 例 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 \cdot 5 + 7 & -2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

行基本行列は逆行列をもつ：基本変形をおこなった行列に逆の操作をおこなうと，もとの行列にもどる．

- 例 5

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 35 - 3 & 7 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 32 & 11 \end{bmatrix}$$

1 行目は 2 倍され，2 行目には 1 行目の 7 倍が加わっている．ここで $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ という行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \left(\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

と，単純な基本変形の操作をおこなう行列の掛け算で書ける．

- 例 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}$$

行列 A の前に $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ を掛ける $\to$ 第 1 行が 2 倍され，第 2 行が 3 倍される．

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 A の前に $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ を掛ける $\to$ 第 1 行が λ_1 倍，第 2 行が λ_2 倍される

- 例 7： 3×3 行列を調べ，一般の $n \times n$ 行列について考えてみる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 1 行} \times (-2) \text{ を第 2 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{第 3 行} \times (-3) \text{ を第 2 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

「第 1 行 $\times(-2)$ を第 2 行に加える」操作をする行列 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

「第 3 行 $\times(-3)$ を第 2 行に加える」操作をする行列 $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_2P_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2P_1A = E \to AA^{-1} = E \to A^{-1} = P_2P_1$$

問題となっていた行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は,「第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える」操作と「第 3 行の 3 倍を第 2 行に加える」操作をする行列の掛け算になっている．その逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，A とは逆の操作，つまり「第 1 行 $\times(-2)$ を第 2 行に加える」操作と「第 3 行 $\times(-3)$ を第 2 行に加える」操作をする行列の掛け算になっている．

※例 1 から例 7 にでてきた行列の形に注目．右半分上が 0 の行列が多い．これらの行列は下三角行列と呼ばれている．基本変形をおこなう行列は，入れ替え操作をおこなう行列を除き，下三角行列になっている．

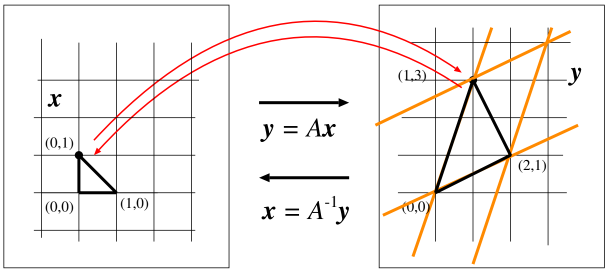
今までのおさらい：線形写像というのは習っていないかもしれないが.

ベクトル・行列・行列式

	見た目	意味
ベクトル	数字を 1 列に並べたもの	矢印，または空間内の点
行列	数字を長方形に並べたもの	空間から空間へのすなおな写像
行列式	なんだか面倒な計算	上の写像による体積拡大率

線形写像の例

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ の場合：

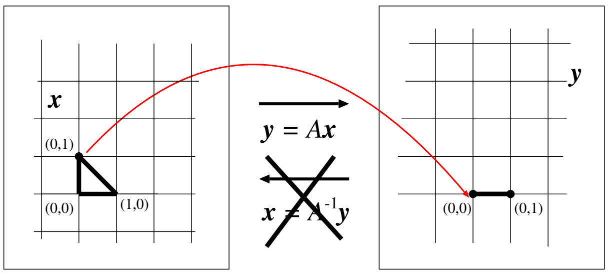


$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 6 - 1 = 5$ からわかるように，面積が 5 倍になっている．これはたちの良い行列．

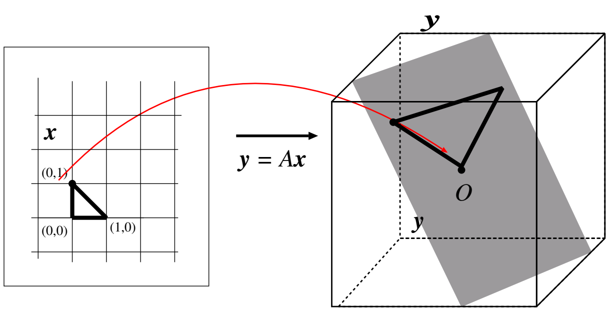
線形写像：たちの悪い行列

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の場合：



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ の場合：



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$