情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 5 回
2005 年 11 月 7 日

掃き出し法による行列式の計算

今日の目標

1. 行列式の意味（前期の復習）.
2. 掃き出し法により行列式 (determinant) を求める.

次週：線形写像： たちの良い行列とたちの悪い行列（0 行列など）.
行列のランクとは

先週までの話

各基本変形に対応する行列について（先週）.

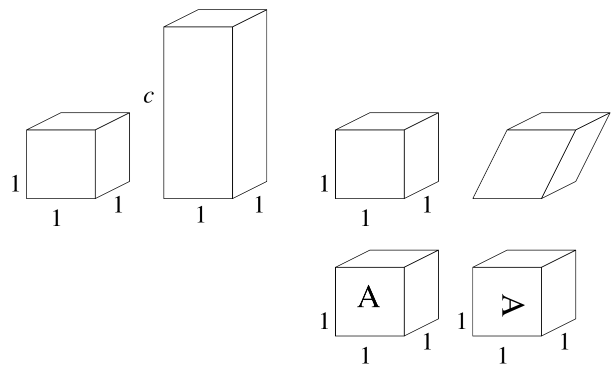
基本変形

1. ある行に 0 でない数をかける.
2. ある行に他のある行の何倍かを加える.
3. ある行と他のある行を交換する.

行列式の性質

1. 一つの行を c 倍すると行列式の値も c 倍される.
2. ある行に他のある行の何倍かを加えても行列式は変化しない.
3. 行と行を 1 回交換すると行列式の符合が変わる.
4. 単位行列の行列式は 1.

※基本変形とそれぞれ対応がつく.
行列式の幾何学的意味（例 1,2,3. 基本変形行列による体積拡大率）.



「行列式＝体積拡大率」

例：
途中で行を $d_1, d_1, \cdots, d_M$ 倍し，L 回だけ行を交換した場合

$$(-1)^L|A|(d_1 d_2 \cdots d_M) = 1$$

- 例 1

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{第 1 行 } \times(-1) \text{ を第 2 行に加える} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

  $$\text{第 2 行 } \times(-3) \text{ を第 1 行に加える} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  行列式の値のみが知りたい場合，右側は必要ない．この例の場合,「ある行に他のある行の何倍かを加えても行列式は変化しない」という性質しか使っていないので，行列式は単位行列と同じ 1.

- 例 2

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 1 行 } \times(-2) \text{ を第 2 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$\Longrightarrow \text{第 2 行 } \times(-3) \text{ を第 1 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 1 行に } 1/2 \text{ を掛ける} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  第 1 行を 1/2 倍したので，$|A|1/2 = 1$ より，行列式の値 $|A| = 2$.

実は, 単位行列の形にまでする必要はなく．上三角（または下三角）の状態でよい. それは各列,各行から一つづつという行列式を求める式を思い出せばわかる.

行列式の計算法

- $\mathrm{det}A = |A| = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$
- $\varepsilon_{123} = 1$
- 添字を入れ替えるとマイナスになる.
  例： $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123} = -1$ （1 と 2 を入れ替え）
  例： $\varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{123} = 1$ （2 と 3 を入れ替え，さらに 1 と 2 を入れ替え）

- 例 3

  ぺちゃんこになる例.

$\boxed{\text{例題}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

の逆行列 A^{-1} と行列式 $|A|$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 1 行 } \times 3 \text{ を第 2 行に加え，第 1 行 } \times(-2) \text{ を第 3 行に加える}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 2 行 } \times 5/7 \text{ を第 3 行に加える，第 2 行 を } 1/7 \text{ 倍する.}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11/7 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 6/7 & 1/7 & 5/7 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{第 3 行 } \times -11/6 \text{ を第 2 行に加える，第 3 行 を } 7/6 \text{ 倍する.}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & -7/6 & -11/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 5/6 & 7/6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{|A| = 7 \times 6/7 = 6}$$

$$\Longrightarrow \text{第 2 行 } \times -2 \text{ を第 1 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2/3 & 7/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & -7/6 & -11/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 5/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{第 3 行 } \times -3 \text{ を第 1 行に加える} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & -7/6 & -11/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 5/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & -11 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$