情報システム工学科
伊達 章

線形写像 （ランク）

今日の目標

1. 線形写像： たちの良い行列（正則行列）とたちの悪い行列（0 行列など）.
2. 行列のランクとは：計算の仕方とその意味.
3. カーネル（核），イメージ（像）とは

次週： 連立一次方程式の解の有無
たちの良し悪しの判定（逆行列が存在するための条件）
ランクと核・像と単射・全射

先週までの話

掃き出し法により行列式 (determinant) を求める（先週）.
行列式の意味（前期の復習）.

ランクの求め方 (1)： 基本変形による計算で

行列 A に対し，基本変形を繰り返しおこない，

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & * & & \\
 & \ddots & 0 & & \ddots & \\
0 & & 1 & & & \\ \hline
0 & & & 0 & & \\
 & \ddots & 0 & & \ddots & * \\
0 & & 0 & & & 0
\end{array}\right)
\end{array}
= \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}
$$

となった場合，Rank $A = r$ （行列 A のランクは r．　教科書 p.114）.

例：

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Rank}\ A = 2
$$

ランクの求め方 (2)：線形独立（1 次独立）かどうかを判断

2×3 行列の場合：3 本の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を列とする 2×3 行列を $A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3)$ と書く．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち，線形独立なものの個数を行列 A のランク（または階数）と呼ぶ.

$n \times m$ 行列の場合：m 本の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を列とする $n \times m$ 行列を $A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_m)$ と書く．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ のうち，線形独立なものの個数を行列 A のランク（または階数）と呼ぶ.

手がかりがりが足りない場合（横長行列・核）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2_x 3 & = & 2 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{3}$$

「ぺちゃんことにつぶれる」 $\Longrightarrow$ 「複数の $\boldsymbol{x}$ が同じ $\boldsymbol{y}$ に移る」
問：「A でこの $\boldsymbol{y}$ に移ってきました．元の $\boldsymbol{x}$ はどこだったでしょうか」
$\Longrightarrow$ 「この直線上のどこかにいたはずだ」ということ以外は分からない．

<u>（極端な）例</u>

<u>例 1</u>

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

<u>例 2</u>

$$\begin{pmatrix} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

用語：核 (kernel)

核：$A\boldsymbol{x} = 0$ に移ってくるような $\boldsymbol{x}$ の集合．Ker A と表す．
例 1：Ker A は 1 次元．
例 2：Ker A は 2 次元．
ぺちゃんこにつぶれない場合は Ker A は 0 次元（原点 $\boldsymbol{o}$ ただ 1 点のみ）．

<u>$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{o}$ でない場合について：</u>

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ だとする．これと同じ $\boldsymbol{y}$ に移ってくるような $\boldsymbol{x}'$ の集合を考える．
$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}$ ここから $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{o}$
$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{z}$ とするとこれは $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$ と書け，$\boldsymbol{z}$ が Ker A に入っていることがわかる．

逆に，$\boldsymbol{z}$ が Ker A に入っている場合．
$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ を作る．$A\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = A\boldsymbol{x}$
これが「Ker A に平行な方向の成分が定まらない」理由．

手がかりがりが多すぎる場合（縦長行列・像）

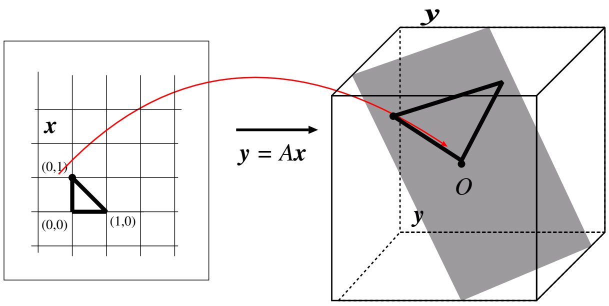
$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 &= -1 \\
x_1 + x_2 &= -5 \\
2x_1 - x_2 &= 5
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{7}
$$

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}' \tag{8}
$$

この式を満たす $\boldsymbol{x}$ は存在しない．→ この $\boldsymbol{y}'$ について「そこに移ってきてくれる $\boldsymbol{x}$ が存在しない」

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ の場合：



$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}
$$

はみだした $\boldsymbol{y}'$ について：「そこに移ってきてくれる $\boldsymbol{x}$ が存在しない」

用語： 像 (image)

A の像：与えられた A に対して，$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときに A で移りえる $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の集合．Im A と表す．元の空間全体を A で移した領域．

手がかりの個数が合っていても... 特異行列

たちの良し悪しは行列のサイズだけではいいきれない．
核 Ker A や像 Im A がどうなっているかが本質．(プログラミングのための線形代数 p.114)

例題

$$
A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

行列式 $|A| = 0$ で逆行列が存在しない.

問 ： A でこの $\boldsymbol{y}$ に移ってきました． 元の $\boldsymbol{x}$ は何か.

例： $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき．原点以外からも 0 に移ってくる．$\rightarrow$ 答：「1 つには絞れません」

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例： $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき解はない．$\rightarrow$ 答：「そのような $\boldsymbol{x}$ ありません」

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

次元定理：

$m \times n$ 行列 A について，

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \dim \mathrm{Im}\ A = n$$

ここで $\dim X$ は X の次元.

意味： A は n 次元空間から m 次元空間への写像であり,「もとの n 次元空間から，Ker A の次元分がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分.」

例 $(2 \times 3$ 行列)：

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \dim \mathrm{Im}\ A = n \rightarrow 1 + 2 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

意味： A は 3 次元空間から 2 次元空間への写像であり,「もとの 3 次元空間から，Ker A の次元分（1 次元）がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分（2 次元）.」

ランク（階数）： 像 Im A の次元 $\dim \mathrm{Im}\ A$：$\dim \mathrm{Im}\ A = \mathrm{rank}\ A = n$

次元定理をもう一度：$m \times n$ 行列 A について，

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \mathrm{Rank}\ A = n$$

学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005 年 11 月 14 日

線形代数　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト

次の行列 A について以下の問に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

1. 行列 A のランクを求めなさい.

2. ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$ の線形独立性を判定しなさい.

学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2005 年 11 月 14 日
線形代数　　名前：＿＿＿＿＿＿　得点：＿＿＿＿

小テスト：解答例

次の行列 A について以下の問に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

1. 行列 A のランクを求めなさい.

$\Longrightarrow$ 第 1 行 $\times(-1)$ を第 2 行および第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 第 2 行 $\times(-2)$ を第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 第 2 行 $\times(-2)$ を第 1 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

答： $\mathrm{rank}\ A = 2$.

2. ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$ の線形独立性を判定しなさい.

$\mathrm{Rank}\ A = 2$ より，線形独立ではない.

※ 講義のページ：`http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/2005la/index.html`