情報システム工学科
伊達 章

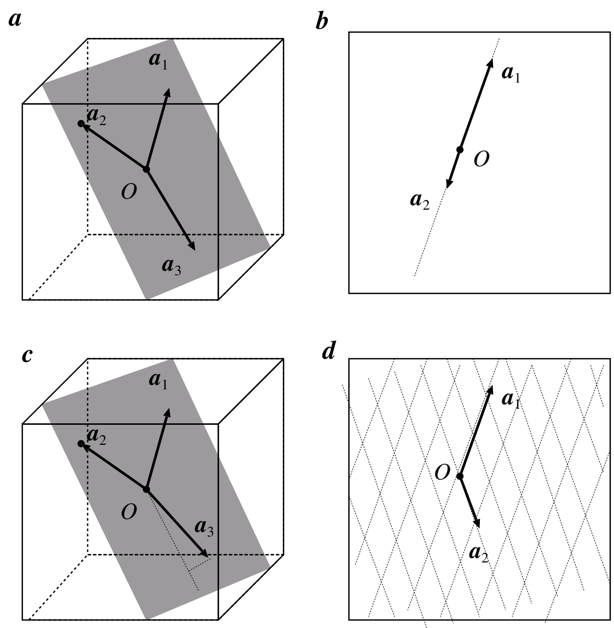
線形写像 （ランクと核・像と全射・単射）

今日の目標

連立一次方程式の解の有無と一意性
次週： 前半のまとめ

先週までの話

線形写像 （ランクと核・像と全射・単射）
基本変形による計算でランクを求め，線形独立かどうかを判断した.



a, b は線形（一次）従属，c, d は線形（一次）独立の例

核 (kernel)： $A\boldsymbol{x} = 0$ に移ってくるような $\boldsymbol{x}$ の集合．Ker A と表す.
像 (image)： A の像：与えられた A に対して，$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときに A で移りえる $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の集合．Im A と表す．元の空間全体を A で移した領域.

手がかりの個数が合っていても... 特異行列

たちの良し悪しは行列のサイズだけではいいきれない.
核 Ker A や像 Im A がどうなっているかが本質.（プログラミングのための線形代数 p.114）
例：線形写像：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

行列式 $|A| = 0$ で逆行列が存在しない.

問 ： $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ について，A でこの $\boldsymbol{y}$ に移ってきました． 元の $\boldsymbol{x}$ は何か.

例： $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ のとき．原点以外からも 0 に移ってくる．→ 答：「1 つには絞れません」

$$\begin{pmatrix}8&6\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}8&6\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}8&6\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

例： $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ のとき解はない．→ 答：「そのような $\boldsymbol{x}$ ありません」

$$\begin{pmatrix}8&6\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

1. 同じ結果 $\boldsymbol{y}$ がでるような原因 $\boldsymbol{x}$ は唯一か（Ker A が原点 $\boldsymbol{o}$ のみか）$\Longleftrightarrow$ 「写像は単射か」
2. どんな結果 $\boldsymbol{y}$ にも，それが出るような原因 $\boldsymbol{x}$ が存在するか．(ImA が行き先の全空間に一致しているか) $\Longleftrightarrow$ 「写像は全射か」

：

次元定理

$m\times n$ 行列 A について，

$$\dim \mathrm{Ker}\ A+\dim \mathrm{Im}\ A=n$$

ここで $\dim X$ は X の次元.

意味： A は n 次元空間から m 次元空間への写像であり,「もとの n 次元空間から，Ker A の次元分がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分.」

例 (2×3 行列)：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\dim \mathrm{Ker}\ A+\dim \mathrm{Im}\ A=n\Longrightarrow 1+2=3$$

意味： A は 3 次元空間から 2 次元空間への写像であり,「もとの 3 次元空間から，Ker A の次元分（1 次元）がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分（2 次元）」.

例 (3×2 行列)：

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

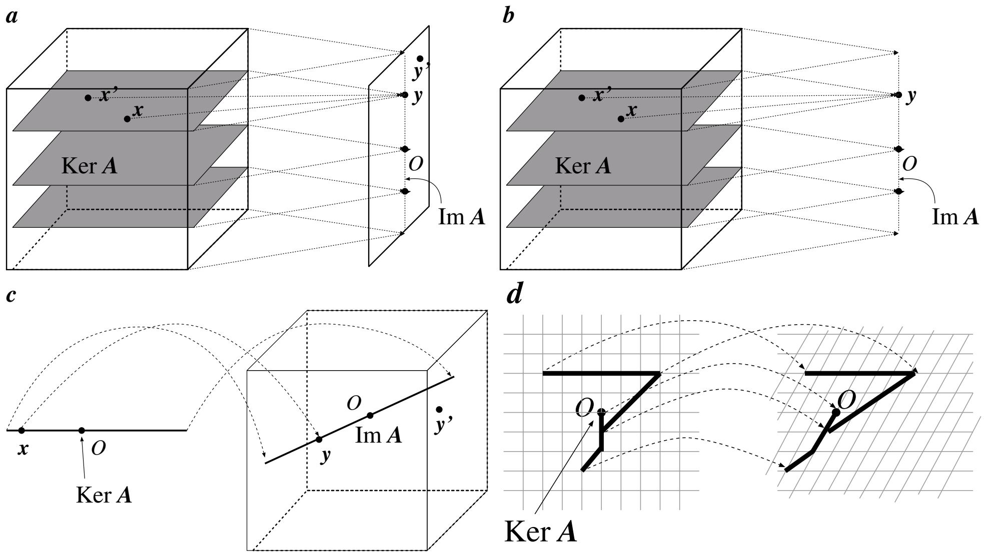
$$\dim \mathrm{Ker}\ A+\dim \mathrm{Im}\ A=n\Longrightarrow 0+2=2$$

意味： A は 2 次元空間から 3 次元空間への写像であり,「もとの 2 次元空間から，Ker A の次元が 0 次元なのでつぶれはしないが，Im A の次元は 2 次元となる」.

ランク（階数）： 像 Im A の次元 dim Im A：dim Im A = rank $A = n$

次元定理をもう一度：$m \times n$ 行列 A について,

$$\dim \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Rank}\, A = n$$



a 全射でも単射でもない，b 全射だが単射でない，c 単射だが全射でない，d 全単射.

連立１次方程式，ベクトルの線形独立性，逆行列，ランクと行列式

連立１次方程式

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + y - z &= 1 \\ -x + y + z &= 4 \end{cases}$$

について，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ と書くと，この連立方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書ける．行列 A の各列をベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すと，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

と書け，連立１次方程式は

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

と書き直せる.

1. ベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合でただ一通りに表せる条件：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立

2. 連立方程式が唯一の解をもつ条件：行列式 $|A|$ が 0 でない

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立である必要十分条件：それらを列とする行列の行列式が 0 でない

$n \times n$ 行列 A に関する次の条件はすべて同値

1. A のランクが n
2. 行列式 $|A|$ が 0 でない
3. 逆行列 A^{-1} が存在する
4. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が唯一の解をもつ

このような行列 A を <u>正則行列</u>, そうでないものを <u>特異行列</u> と呼ぶ.