

線形変換の行列の固有値・固有ベクトル

今日の目標

固有値，固有ベクトルとは：その意味を例題で理解する．

【重要】ものの見方．

物事の表現の仕方と計算の関係．

「物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる」

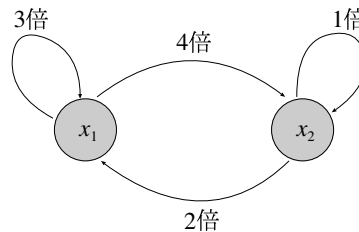
次回：直交行列

先週までの話

掃き出し法，連立一次方程式，逆行列，行列式，線形独立性，ランク（階数）

以下の各概念がどう互いに関わっているのか各自で整理しておく．

例：



$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}(0)$$

【問】 n 回更新した後の状態を求めたい

$$\mathbf{x}(n) = A^n \mathbf{x}(0) \implies A^n \text{ が対角行列でないときこの計算は大変}$$

ここで突然ではあるが，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ 言い換えれば $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ と x_1, x_2 を線形変換した変数 y_1, y_2 で考えてみる．ここで

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

である． $\mathbf{y}(1)$ と $\mathbf{y}(0)$ の関係を表現する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(1) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(0)
\end{aligned}$$

計算してみると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(1) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) = \Lambda \mathbf{y}(0)
\end{aligned}$$

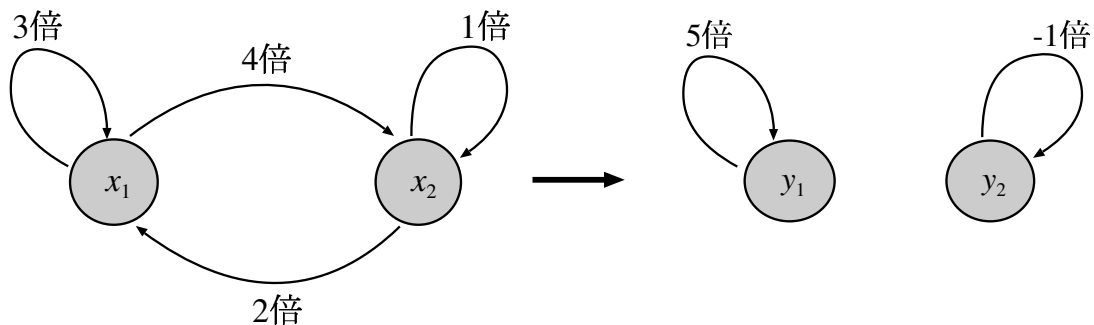
ここから

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) = \Lambda^n \mathbf{y}(0)$$

であることがわかる.

問題の本質：基底を取り替えれば扱いやすくなる

このシステムでは $y_1 = (2x_1 + x_2)/3, y_2 = (x_1 - x_2)/3$ という量が本質的. y_2 という量は毎回符号が変わるだけだが, y_1 は時間が経つごとに増えていくことがわかる. 一般に固有値の大きい固有ベクトルがシステムの振る舞いに効いてくる.



1. 初期値 $\mathbf{x}(0)$ を $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ で y 座標系の表現に変換する.
2. y 座標系で n 乗を計算する.
3. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ でもとの x 座標系に戻す.

疑問： どうすれば, このような都合のよい変換行列 P が見つかるか.

からくり：実は，行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ は，行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルを並べたもの．固有ベクトルを基底ベクトルとして用い，物事を表現して考えると便利なことを，これから見ていく．

定義

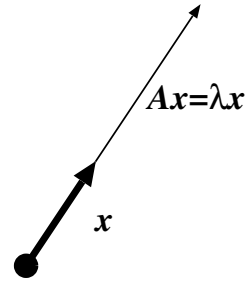
ある n 次元正方行列 A に対して，

$$Ax = \lambda x$$

をみたす n 次元ベクトル $x(x \neq 0)$ と数 λ が存在するとき，

1. λ を 行列 A の固有値
2. x を 固有値 λ に対する固有ベクトル

という．固有ベクトルは， λ が実数のとき， A という行列をかけても方向が変わらないベクトルと解釈できる．



固有値，固有ベクトルの具体的な計算

$$Ax = \lambda x \rightarrow Ax = \lambda Ex \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda E - A)x = 0 \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

固有方程式： $\phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ $(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

固有値 $\lambda = -1, 5$

固有方程式について； $\lambda E - A$ の行列式の値が 0 でないとすると， $(\lambda E - A)^{-1}$ が存在し， $x = 0$ という解をもつことになる．これは $x \neq 0$ に矛盾する．したがって $|\lambda E - A| = 0$ である．この方程式を固有方程式（特性方程式）と呼ぶ．

$$(\lambda E - A)x = 0 \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = -1$ の場合

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

これを満たす x_1, x_2 が固有ベクトル．例えば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = e_1$$

$\lambda = 5$ の場合

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 5$ に対応する固有ベクトル．例えば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$$

基底ベクトルによる表現

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- \mathbf{x} を行列 A の固有ベクトル方向に分けて考えてみる .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\mathbf{y}$$

- 次の時刻での状態を考えよう .

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = A(y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) = y_1 A\mathbf{e}_1 + y_2 A\mathbf{e}_2 = y_1 \lambda_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \lambda_2 \mathbf{e}_2$$

$A\mathbf{e}_1$ は $\lambda_1 \mathbf{e}_1$ となり , もはや行列とベクトルの掛け算などと言わなくてもいい .

$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ を \mathbf{y} で表すことを考える . $\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \mathbf{x}' = P\mathbf{y}'$ を代入すると

- $P\mathbf{y}' = AP\mathbf{y} \implies \mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y}$

- ここで $AP = A \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{e}_1 & \lambda_2 \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P\Lambda$

- これより $\mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y} = P^{-1}P\Lambda\mathbf{y} = \Lambda\mathbf{y}$

このように $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角行列 Λ が得られる . これを 行列の対角化 と呼ぶ .

講義ではここで時間切れになった .

- $\mathbf{y}(n) = \Lambda^n \mathbf{y}(0)$

- $\mathbf{x}(n) = P\mathbf{y}(n) = P\Lambda^n \mathbf{y}(0) = P\Lambda^n P^{-1} \mathbf{x}(0) = A^n \mathbf{x}(0)$

したがって $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ と表現できることがわかる .

行列の対角化

$n \times n$ 行列 A が , n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をもち , それぞれの固有値に対する固有ベクトルが $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ のとき , 行列 $P = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$ を用いて , 行列 A は以下のように対角化できる .

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

1. 対角行列の対角成分は , すべて固有値になる .

いままでの話は , 「調子のよい偶然の結果」 . たまたま固有値が実数でしかもすべて異なっていた . 一般には , 固有値は複素数で , しかも重根の場合がある .

固有値が複素数だと , 固有ベクトルも複素ベクトルになってしまい , 固有方向を λ 倍するといつても , なんとことやら困ったことになる . これについては次回 .