情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 10 回
2005 年 12 月 14 日

直交変換，固有値が複素数の場合，二次形式の固有値・固有ベクトル

今日の目標

固有値が複素数の場合：回転を表す
直交行列

次回： 二次形式の固有値

先週までの話

線形変換の固有値，固有ベクトル．物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる．

おさらい：急いだのでもう一度．

$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ で変化するシステムを考えていた．$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の場合，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めると，$\lambda_1 = -1, \lambda_1 = 5$，固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であることは計算できた．つまり，

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となっている．整理しよう．

- 通常の表現（x 座標系）： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ これで考えると大変
- $\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 方向に分けて考えてみる．それぞれの方向の成分を y_1, y_2 とする．
  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\boldsymbol{y}$
- 次の時刻での状態を考えよう．

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = A(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = y_1 A\boldsymbol{e}_1 + y_2 A\boldsymbol{e}_2 = y_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\lambda_2\boldsymbol{e}_2$$

  $A\boldsymbol{e}_1$ は $\lambda_1\boldsymbol{e}_1$ となり，もはや行列とベクトルの掛け算などと言わなくてもいい．この式を整理すると

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda\boldsymbol{y}$$

- 念のためもう一つ先の時刻での状態を考えよう．
$$\boldsymbol{x}'' = y_1\lambda_1 A\boldsymbol{e}_1 + y_2\lambda_2 A\boldsymbol{e}_2 = y_1\lambda_1^2 e_1 + y_2\lambda_2^2\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = P\Lambda\boldsymbol{y}$$
- $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ より，
$$A\boldsymbol{x} = AP\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = P\Lambda\boldsymbol{y}$$
となり，両辺を見比べると，$AP = P\Lambda$ 言い換えれば $P^{-1}AP = \Lambda$ となることがわかる．このように行列 A を，A の固有ベクトルを並べた行列 P を使って，対角行列 Λ を求めることを，行列の対角化，と呼んでいる．

- 別の見方をしよう．$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ で表すことを考える．$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}' = P\boldsymbol{y}'$ を代入すると
- $P\boldsymbol{y}' = AP\boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{y}' = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$
- ここで $AP = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{e}_1 & \lambda\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = P\Lambda$
- これより $\boldsymbol{y}' = P^{-1}AP\boldsymbol{y} = P^{-1}P\Lambda\boldsymbol{y} = \Lambda\boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{y}(n) = \Lambda^n\boldsymbol{y}(0)$
- $\boldsymbol{x}(n) = P\boldsymbol{y}(n) = P\Lambda^n\boldsymbol{y}(0) = P\Lambda^n P^{-1}\boldsymbol{x}(0) = A^n\boldsymbol{x}(0)$
したがって $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ と表現できることがわかる．

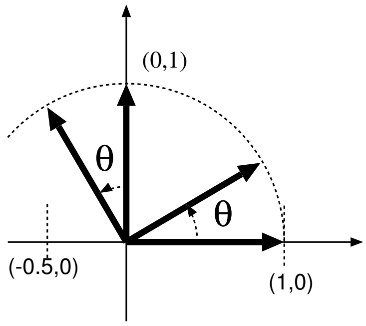
まとめ

「物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる」
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = y_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = P\boldsymbol{y}$$
このように $\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 方向に分けて考えてみることがシステムの動作を理解するのに役に立つ．

ここまでの話は，固有値が実数（整数）でしかもすべて異なっていた．$\Longrightarrow$ 調子の良い偶然の結果．一般には，固有値は複素数で，しかも重根の場合がある．固有値が複素数だと，固有ベクトルも複素ベクトルになってしまい，固有ベクトル方向を λ 倍するといっても，何のことやら実数で考えていると困ったことになる．

例：

変換行列が $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ であるような，変換を考えてみる．これは
$$A = \begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$$
となっており，原点 O を中心とする角 θ の回転移動を表す行列となっている．



A の固有値を求めよう.

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \to \ A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \quad & \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \\
(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \quad & \begin{bmatrix}2\lambda-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 2\lambda-\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = 0 \\
\text{固有方程式：}\ \phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \quad & (2\lambda-\sqrt{3})^2 + 1 = 0 \\
& 4\lambda^2 - 4\sqrt{3}\lambda + 4 = 0 \\
& \lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0 \\
\text{固有値} \quad & \lambda = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6} = e^{\pm i\pi/6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}\text{の場合} \quad & \begin{bmatrix}\pm i & 1 \\ -1 & \pm i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = 0 \\
\text{これを満たす } x_1, x_2 \text{が固有ベクトル．例えば} \quad & \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ \mp i\end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1
\end{aligned}
$$

- 二つの固有値は互いに複素共役で $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$ の関係にある.
- 固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は実数の範囲にない．$\Longrightarrow$ 2 次元平面を回転するのだから，方向が変わらないベクトルはない．二つの固有ベクトルも互いに複素共役で $\boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{e}_1}$ の関係にある.
- 任意の実ベクトルは，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表せる（係数を共役複素数にとればいい）.

  例：実ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表現.

  $$\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix}1 \\ -i\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1 \\ i\end{bmatrix}$$

$$
\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_2 & = & -i\alpha_1 + i\alpha_2 \end{array}\right.
$$

$$ix_1 - x_2 = 2i\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{-x_1 - ix_2}{-2} = \frac{x_1 + ix_2}{2}$$

$$ix_1 + x_2 = 2i\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{-x_1 + ix_2}{-2} = \frac{x_1 - ix_2}{2}$$

となり $\alpha_2 = \bar{\alpha_1}$ であることがわかる.