情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 11 回
2006 年 1 月 11 日

直交変換とその性質

今日の目標

直交行列とは

次回： 二次形式の固有値

前回までの話

線形変換の固有値，固有ベクトル．
物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる．
固有値が複素数の場合：回転を表す

直交行列とは：

『直交行列による変換（直交変換）で，線分の長さや，線分どうしのなす角は変化しない．』

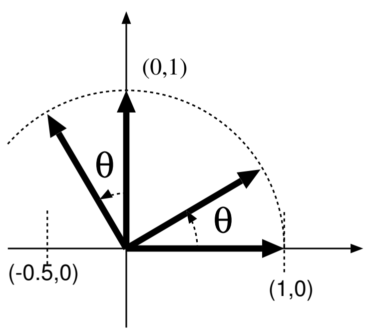
- 線分の長さが変化しない：$|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \dfrac{(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})}{|A\boldsymbol{x}||A\boldsymbol{y}|} \Longrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})$

例：x-y 平面で，角度 θ だけ回転する写像

変換行列が $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ であるような，変換．これは

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

となっており，原点 O を中心とする角 θ の回転移動を表す行列となっており，これは直交行列の例になっている．



A の固有値 λ を求めると，

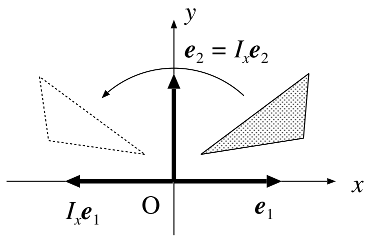
$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6} = e^{\pm i\pi/6}$$

- 固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は実数の範囲にない．$\Longrightarrow$ 2 次元平面を回転するのだから，方向が変わらないベクトルはない．二つの固有ベクトルも互いに複素共役で $\boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{e}_1}$ の関係にある．

<u>回転と鏡映</u>

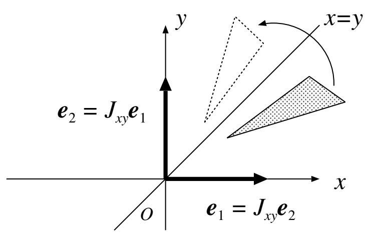
鏡映によって，図形の形は変わらないが，向きが反転，裏返しになる．
例 1. x-y 平面で，y 軸に関して対称に折り返す写像 I_z

$$I_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例 2.
x-y 平面で，x 軸を y 軸に，y 軸を x 軸にする写像.

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



<u>一般（広義）の回転</u>： 回転と鏡映をいくつか合成したもの

一般の回転は，任意の図形をそれと合同な図形に写像する．
$\Longrightarrow$ 線分の長さや，線分どうしのなす角はこの写像によって変化しない.

- 線分の長さが変化しない：$|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \dfrac{A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}}{|A\boldsymbol{x}||A\boldsymbol{y}|} \Longrightarrow \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$
  $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で成り立てば，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を代入すると，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 = |A\boldsymbol{x}|^2$ で $|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ が言える．

定理： 直交行列

正方行列 U が直交行列であることは，次のように表すことができて，それらはどれも同値である．

1. 行列 U は一般の回転を表し，図形を合同な図形に写像し，線分の長さもなす角度も変えない．$\Longrightarrow$ 行列式 $|U|=1$ （この変換によって対応する領域の面積/体積が変化しない）
2. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(U\boldsymbol{x},U\boldsymbol{y})$ （内積の保存）
3. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=|U\boldsymbol{x}|$ （大きさの保存）
4. 行列 U の各列の要素を成分とする n 個の列ベクトルはすべて長さ 1 で，たがいに直交する．すなわち $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}$
5. $U^{\mathrm{T}}U=UU^{\mathrm{T}}=E$
$$U^{\mathrm{T}}U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}$$
例： $U=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}$ の場合，内積が $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=0$ となり，大きさ $|\boldsymbol{u}_1|=|\boldsymbol{u}_2|=1$ ．
6. $U^{\mathrm{T}}=U^{-1}\Longrightarrow$ 逆行列を計算する手間が省ける

この直交行列による線形変換を，直交変換という

直交という名前の由来：行列を列の並びとみなしたとき，それがすべて直交しているから．

例：

原点 O を中心とする角 $\theta=30^\circ$ の回転移動を表す行列 $U=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$ は直交行列になっており，上の性質をすべて満たしている．

U^{T} は原点 O を中心とする角 $\theta=-30^\circ$ の回転移動を表す行列

$$U^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ\\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos -30^\circ & -\sin -30^\circ\\ \sin -30^\circ & \cos -30^\circ\end{bmatrix}$$

となっており，$UU^{\mathrm{T}}=E$ となるのも直感的に理解できる．

双一次形式

次のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の実数値関数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を考える．

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{y}$$

つまり，二つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を入力すると一つの実数が出力される．

この関数は次のような線形性をもつことがわかる．

$$f(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=c_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+c_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$$

$$f(\boldsymbol{x},c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2)=c_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+c_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$$

とする．このとき関数 f を 双一次形式 という．さらに対称性

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

をもつとき双一次形式 関数 f は対称であるという．双一次形式 関数 f が対称であれば行列 F は対称行列

$$F^{\mathrm{t}} = F$$

である．

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

を行列を用いて，例えば以下のように書ける．

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

2 次形式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{x}$$

を 2 次形式という．当然，F は対称行列になる．

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

を行列を用いて

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

と書ける．

例：内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は対称な双一次形式

基底が正規直交系の場合，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} E \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{y}$$

内積となるには以下の正値性も必要：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} G \boldsymbol{x} \geq 0 \text{ 等号は } \boldsymbol{x} = 0 \text{ のときにかぎる}$$