

二次形式の固有値

今日の目標

二次形式とは
二次形式の固有値

次回：二次曲線の主軸変換

前回までの話

直交行列，直交変換：

『直交行列による変換（直交変換）で，線分の長さや，線分どうしのなす角は変化しない』
双一次形式

双一次形式と合同変換：

次のベクトル x, y の実数値関数 $f(x, y)$ を考える．

$$f(x, y) = x^t F y$$

意味：二つのベクトル x, y を入力すると一つの実数が得られる．

この関数は次のような線形性をもつことがわかる．

$$f(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 f(x_1, y) + c_2 f(x_2, y)$$

$$f(x, c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 f(x, y_1) + c_2 f(x, y_2)$$

とする．このとき関数 f を 双一次形式 という．さらに対称性

$$f(x, y) = f(y, x)$$

をもつとき双一次形式 関数 f は対称であるという．双一次形式 関数 f が対称であれば行列 F は対称行列

$$F^t = F$$

である．

例：

$$f(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

を行列を用いて，例えば以下のように書ける．

$$f(x, y) = x^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y$$

2 次形式：変数の 2 次の項のみからなる式

$$f(x, x) = x^t F x$$

を2次形式という。当然， F は対称行列になる。

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

を行列を用いて

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

と書ける。

例：内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は対称な双一次形式

基底が正規直交系の場合，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^t E \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{y}$$

内積となるには以下の正値性も必要：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t G \boldsymbol{x} \geq 0 \text{ 等号は } \boldsymbol{x} = 0 \text{ のときにかぎる}$$

例題：次の2次形式をベクトルと対称行列を使い表現せよ。

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1$$

解答：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x})$$

対称行列にはよい性質がある。証明はほとんどの教科書に掲載されているので省略。

定理：対称行列

- 対称行列の固有値はすべて実数。
- 各固有値に対して実数を成分とする固有ベクトルが求まる。
- 各固有ベクトルは互いに直交する。

例：対称行列の固有値，固有ベクトルの具体的な計算

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow F\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda E - F)\mathbf{x} = 0 \quad \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

固有方程式： $\phi(\lambda) = |\lambda E - F| = 0$

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

固有値 $\lambda = 1, 3$

$$(\lambda E - F)\mathbf{x} = 0 \quad \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 1$ の場合

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

これを満たす x_1, x_2 が固有ベクトル．例えば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるが，長さが 1 になるようにして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1$$

$\lambda = 3$ の場合

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル．例えば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2$$

このように対称行列では，固有値，固有ベクトルが実数で，固有ベクトル \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 が直交していることがわかる．

ここで先にみたように $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ つまり $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ のように基底ベクトルを変換して考えよう． P は F の固有列ベクトルを並べたものであり，今は互いに直交しており，長さが 1 であるので $P^{-1} = P^t$ と書ける．

不変量：座標変換しても不変な量がある

定理

二次形式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ の値は，どの基底に関する成分を用いても同じである．

\mathbf{x} の成分: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, $F' \rightarrow P^t F P$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^t F \mathbf{x} = (P\mathbf{y})^t F P \mathbf{y} = \mathbf{y}^t (P^t F P) \mathbf{y} = \mathbf{y}^t F' \mathbf{y}$$

トレース (対角和，固有和，跡などともいう): 対称行列の対角要素の和．

合同変換: $F' \rightarrow P^t F P$

定理

行列 F のトレースは直交行列による合同変換によって変化しない。
 このことを「トレースは直交行列による合同変換に関する不変量である」という。

とくに、行列 F を対角化する直交行列を P とし、行列 F の n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、 F' は対角行列で、 $\text{Tr}F'$ は固有値の和に等しくなる。したがって、一般に対称行列 F のトレースは

$$\text{Tr}F = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

である。

対称行列 F の行列式を計算してみる。

合同変換： $F' \rightarrow P^t F P$

直交変換 P の行列式 $|P|$ は ± 1 。 $|F'| = |P^t| |F| |P|$ 、 $|P| |P^t| = 1$ より $|F'| = |F|$
 例。

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, |F| = 3$$

を直交行列 P による合同変換を使って対角化する。

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|P| = -1$$

$P^t P = E$ となっていることを確認しよう。

$$P P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^t F P = \Lambda$ となっていることを確認しよう。

$$F' = P^t F P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|F'| = 3$$

$|F| = |F'| = 3$ となっていることを確認する。トレース： $2 + 2 = 1 + 3$

物理や工学の多くの問題では、二つの二次形式が現れて、一方を対角化し、かつ同時に他方を単位行列にする必要が生じる（のであるが、ここでは解説する時間がない）。

定理

正値二次形式 (Positive Definite) の固有値はすべて正である。

2次形式

$$f(x, x) = x^t F x \geq 0 \text{ (等号は } x = 0 \text{ にかぎる)}$$

を満たす二次形式を正値二次形式、または、正の定符号をもつ二次形式という。ベクトル x がある物理系を表しているとき、各種のエネルギーは正値二次形式になっていることが多い。

例：

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

は $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ ならば，

$$\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2$$

が 0 となるのは $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の場合にかぎる．したがって，このときには C は正値対称行列である．