情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 13 回
2006 年 1 月 23 日

二次曲線の主軸変換

今日の目標

二次曲線の主軸変換を理解する

次回　総まとめ

前回までの話

二次形式の固有値，固有ベクトル
対称行列の性質

- 対称行列の固有値はすべて実数．各固有値に対して実数を成分とする固有ベクトルが求まる．
- 各固有ベクトルは互いに直交する．

2 次形式： $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x}$，$F$ は対称行列．

例：

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

を行列を用いて

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

と書ける．

物理や工学の多くの問題では，二つの二次形式が現れて，一方を対角化し，かつ同時に他方を単位行列にする必要が生じる（のであるが，ここでは解説する時間がない）．

二次曲線の主軸変換

二次曲線とは： x 軸，y 軸を座標軸とする二次元平面上で以下の方程式を満たす点 (x,y) の集合

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + fx + gy + c = 0$$

具体例

x-y 平面上で方程式

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$$

を満足する点 (x,y) の軌跡を考える．

$$x^2 + xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と書けるから

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とおくと，上式は

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{x} = 1$$

と表される．この行列の固有値，固有ベクトルは先に計算してある．長さを 1 に正規化した固有ベクトルを並べた変換行列（直交行列） P は

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

と変換し，もとの式 $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$ に代入する．

$$\frac{1}{2}(-x' + y')^2 + \frac{1}{2}(-x' + y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = \frac{1}{2}$$

整理すると，

$$(-x' + y)^2 + y'^2 - x'^2 + (x' + y')^2 = 1$$

$$x'^2 + 3y'^2 = 1$$

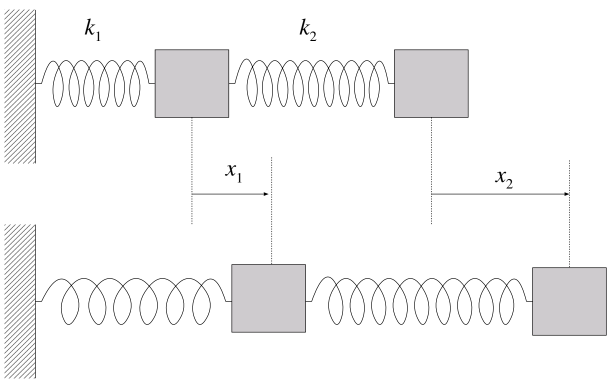
$$x'^2 + \left(\frac{y'}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^2 = 1$$

これは長軸の半径が 1，短軸の半径が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の楕円である．

$$P = P^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

x 軸と y 軸を入れ替えて 45 度回転する変換であることがわかる．

二次形式の固有値



変位状態 $\boldsymbol{x}$

平衡状態からの変位を $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ で表す．バネ定数 k のバネが x だけ伸びた（縮んだ）ときのバネに蓄えられるエネルギーは $kx^2/2$ である．二つのバネに蓄えられるエネルギーを E とすると，

$$E = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2$$

と書ける．これは $\boldsymbol{x}$ の二次形式であり

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

という対称行列 K を用いて

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} K \boldsymbol{x}$$

成分を使って書くと

$$E = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2$$

とである．バネに蓄えられるエネルギーが一定（たとえば $\frac{1}{2}$）という式を書くと

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} K \boldsymbol{x} = 1$$

になる．これは楕円である．なぜ楕円がでるのか，それをみよう．

エネルギー E は $x_1 = x_2 = 0$ のとき 0 となり x_1, x_2 が大きくなると E も大きくなる．そこで $|\boldsymbol{x}| = 1$ と固定し，つまり

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

であるという条件で E を最大化，最小化する $\boldsymbol{x}$ を求めることにする．これは Lagrange の未定係数法を用い

$$F(\boldsymbol{x}) = E - \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})/2$$

を最大最小にする問題として解けばよい．$F(\boldsymbol{x})$ を x_1, x_2 でそれぞれ偏微分し 0 と置くと，

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = (k_1+k_2)x_1 + -k_2 x_2 - \lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = k_2 x_2 - k_2 x_1 - \lambda x_2 = 0$$

これらの式は

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

という連立方程式になっている．具体的に $k_1 = 3, k_2 = 2$ の場合を考えよう．

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

これは行列の固有値 λ，固有ベクトルを求めることにほかならない．