情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2　第 1 回
2006 年 10 月 4 日

応用数学 2：チェックリスト

各概念の考え方，概念どうしの関係を理解する．

1. フーリエ級数，フーリエ変換，線形システム，どれも話は 線形代数.
   (a) 基底ベクトルの線形結合で，信号（波形，関数，情報，音波，音声，画像）を表現：
   $$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$
   (b) 重ね合わせ，線形性：分解して処理できる
   $$f(\boldsymbol{v}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)$$
   (c) 基底ベクトルの選び方は無数にある． どう選ぶか. 正規直交基底とは限らない.
   $$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}'_n$$
   (d) 基底ベクトルが互いに 線形独立 なら，信号の表現が一意に決まる．
   $$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ スペースがもったいないので $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{t}}$ と書く（t は転置）.
   (e) 直交基底 の場合，基底ベクトル成分（重み係数）は内積をとれば求まる.
   $$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) = x_1$$
   (f) 関数を（無限次元の）ベクトルとみて基底として用いる
   $$\text{例:}\quad \boldsymbol{e}_1 = \sin x,\ 0 \le x < 2\pi$$
   $\boldsymbol{e}_1 = (\sin 0.0, \sin 0.1, \sin 0.2, \cdots, \sin 6.1, \sin 6.2)$ $\rightarrow$ これでもっと間隔を小さくしていく
   (g) 無限次元ベクトルどうしが直交するとは.
   $$\boldsymbol{e}_1 = \sin x,\ \boldsymbol{e}_2 = \cos x,\ 0 \le x < 2\pi$$
   $$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$$
   (h) 内積の公理（線形性，対称性，正値性）
   (i) 固有値・固有ベクトル（固有関数）と線形時不変システム
   $$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$
   $$\mathcal{S}[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}, \quad -\infty < t < \infty$$
   $\boldsymbol{x}, e^{i\omega t}$ がそれぞれ固有ベクトル，固有関数になっており，$\lambda, H(\omega)$ が固有値.

2. 複素数を使って信号を表現する．

(a) 複素数と複素平面： すべて図をイメージして意味を理解する

i. 複素数 $\alpha = a + bi = |\alpha| e^{i\theta}$

ii. 複素平面：複素数は 2 次元の実ベクトル (a, b)，実部 a，虚部 b

iii. 極形式表示： 振幅（絶対値）$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$，偏角（位相）$\theta = \arg(\alpha)$

iv. 複素数の積 （絶対値どうしをかけて偏角は足す）

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta| e^{i(\arg(\alpha)+\arg(\beta))}$$

v. <u>オイラーの公式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$</u>　　　（不思議な式： $e^{i\pi} = -1$）

vi. 1 の n 乗根： $\alpha^n = 1$ （単位円を n 分割した図をイメージ）

(b) <u>複素正弦波</u> $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t), \quad -\infty < t < \infty$

i. 3 次元空間中に漂う 1 本の曲線

ii. 角周波数の異なる複素正弦波は幅 2π の区間で互いに直交している

3. フーリエ変換． <u>1 対 1 の変換</u>　$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad -\infty < t, \omega < \infty$

(a) 同じ実体について（2 つの）異なった表現方法がある．逆変換すればもとに戻る．

(b) 一つは時間領域での表現 $f(t)$，もう一つは周波数領域での表現 $F(\omega)$.

(c) フーリエ変換は線形代数で考えると行列とベクトルの積

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{bmatrix} F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega_1 t_1} & e^{-i\omega_1 t_2} & \cdots & e^{-i\omega_1 t_n} \\ e^{-i\omega_2 t_1} & e^{-i\omega_2 t_2} & \cdots & e^{-i\omega_2 t_n} \\ \vdots & & & \\ e^{-i\omega_n t_1} & e^{-i\omega_n t_2} & \cdots & e^{-i\omega_n t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

（この n^2回 の掛け算を $n/2 \log_2 n$ 回で済ませるのが高速フーリエ変換）

(d) 音声信号のような 1 次元の実数値関数 $f(t)$ は 2 次元平面上に 1 本の曲線として表現されている．その $f(t)$ フーリエ変換 $F(\omega)$ は，3 次元空間中に漂う 1 本の曲線で表現される．線から線への一対一の写像になっている．

(e) フーリエ変換の性質（教科書 7.2 節， p.126-129）を例題で図的に理解

[1] 線形性

[2] 波形の移動時間がずれた場合のフーリエ変換．パワースペクトル（絶対値の 2 乗）は不変.

[3] 相似性： 信号 $f(t)$ が存在する範囲と $F(\omega)$ が存在する範囲を同時に狭くすることはできない.

[4] 周波数シフト．そのままではフーリエ変換する対称が複素数になりわかりにくい．$f(t)$ 無線通信の例で理解する.

[5] 対称性
フーリエ変換とフーリエ逆変換は 2π と符合が違うだけ.

(f) デルタ関数

(g) ホワイトノイズとインパルス（デルタ関数）
どちらもパワースペクトルは無限に（$-\infty < \omega < \infty$）広がっている．何が違うか．

(h) 例

i. $f_1(t) = \sin wt, -\infty < t < \infty$ のフーリエ変換 $F_1(\omega), -\infty < \omega < \infty$.

ii. $f_2(t) = \sin(wt + \pi/5), -\infty < t < \infty$ のフーリエ変換 $F_2(\omega), -\infty < \omega < \infty$.

どちらも角周波数は同じで，位相だけが異なっている．フーリエ解析のことを周波数解析ともいう．であれば，この二つをフーリエ変換した結果は同じになってほしいと思うかもしれないが，変換は 1:1 なので，異なる二つの信号をフーリエ変換した結果は異なるものになる．ただし，$F_1(\omega)$ と $F_2(\omega)$ のパワースペクトラムは同じになる．ここがミソ．

4. 線形時不変システム． インパルス応答．たたみこみ．

(a) 線形時不変システム $\mathcal{S}$：入力と出力で信号の形が不変（$e^{i\omega t}$ が固有関数）．

$$\mathcal{S}[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}$$

(b) 式の意味：$e^{i\omega t}$ を線形システム $\mathcal{S}$ に入力すると $e^{i\omega t}$ の振幅が $|H(\omega)|$ 倍，位相が $-\arg(H(\omega))$ だけ遅れた信号が出てくる．

(c) $H(\omega)$ には 4 種類の名前がついている．

i. 線形時不変システムの <u>固有値</u>

ii. <u>周波数特性</u>：各周波数 ω の信号を $e^{i\omega t}$ 入力すると $H(\omega)$ 倍される．

iii. <u>インパルス応答のフーリエ変換</u>

iv. <u>伝達関数</u>
入力のフーリエ変換に $H(\omega)$ をかければ出力のフーリエ変換が得られる．

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

(d) インパルス応答とたたみこみ．
近眼の人が眼鏡をはずすと映像がぼやける．このぼやけた画像は実際の像と，ぼかし関数のたたみこみで表現できる．

5. その他

(a) 計算テクニック．

i. 奇関数と偶関数．

A. 偶関数 $f(-t) = f(t)$ ： y 軸対称． 例 $\cos(-x) = \cos x$

B. 奇関数 $f(-t) = -f(t)$： 原点対称． 例 $\sin(-x) = -\sin x$

ii. 複素数

$$\mathrm{Re}[A_1 e^{i\omega_1 t} \pm A_2 e^{i\omega_2 t}] = \mathrm{Re}[A_1 e^{i\omega_1 t}] \pm \mathrm{Re}[A_2 e^{i\omega_2 t}]$$

$$\mathrm{Re}[\frac{d}{dt} A e^{i\omega t}] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}[A e^{i\omega t}]$$