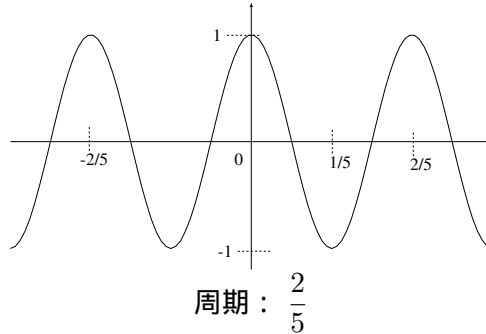


2006年11月8日  
 応用数学2

名前： \_\_\_\_\_ 得点： \_\_\_\_\_

小テスト

1.  $\cos(5\pi t)$  のグラフを描き，周期を求めよ．グラフは  $t = 0$  を中心に2周期分程度の簡単なものでよい．



問2： 周期  $2\pi$  の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t \leq 0 \\ 0, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

をフーリエ級数展開せよ．また，係数  $\frac{a_0}{2}$  の値は何を意味しているか記述せよ．

【回答例】

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 dt + \int_0^{\pi} 0 dt \right\} = 1 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos ktdt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k} \sin kt \right]_{-\pi}^0 = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin ktdt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{k} \cos kt \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{k\pi} (-1 + \cos k\pi) = \frac{-1 + (-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

したがって  $k$  が偶数のとき  $b_k = 0$ ， $k$  が奇数のとき  $b_k = -\frac{2}{k\pi}$  となり，

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$  は  $f(t)$  の平均値である（直流成分と呼ばれている）．

【解説】  $\cos kt = (-1)^k$  を使えばすっきり書ける． $a_0/2 = 1/2$  は  $f(t)$  の平均値である．通常，フーリエ級数展開するとき，これを付け加えるのを忘れないこと．