情報システム工学科
伊達 章

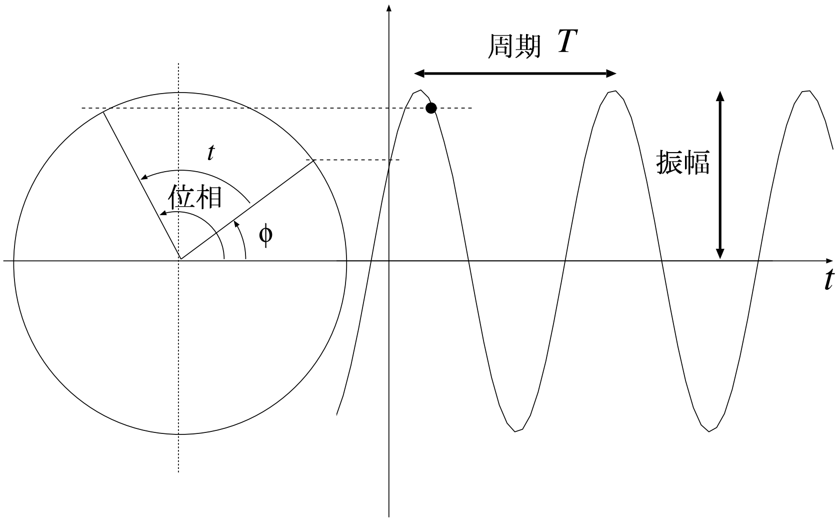
波の性質

今日の目標

$$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \qquad g(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

のような関数のおおまかな波形をイメージできるようにする．

1. 基本用語：周期，振幅，位相（偏角），振動数（周波数，角周波数），周期



円運動と単振動，波との関係．
例： $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$．　振幅 A，初期位相 ϕ．
振動数 f： 1 秒間の振動（回転）の回数．　$f = 1/T$
角周波数 rad/sec.　1 回転（周期）を 2π とした場合，1 秒間に何回転するか．$\omega = 2\pi f$

定義： 周期

$f(t)$ のすべての x に対して

$$f(t + T) = f(t)$$

となる T を $f(t)$ の周期という．
例：$f(t) = \sin t$ の場合．

$$f(t + 2\pi) = \sin(t + 2\pi) = \sin t \to \text{周期 } 2\pi \quad (1)$$
$$f(t + 4\pi) = \sin(t + 4\pi) = \sin t \to \text{周期 } 4\pi \quad (2)$$
$$f(t + 2k\pi),\ k \text{ は整数}, = \sin(t + 2k\pi) = \sin t \to \text{周期 } 2k\pi \quad (3)$$

どんな x の値についても $f(t+2\pi) = \sin t$ が成り立つので，周期は 2π．ただし，どんな t の値についても $f(t + 4\pi) = \sin t$ も成り立つので，周期 4π ともいえる．結局，$\sin t$ は，周期 $2k\pi, k$ は整数，の関数である．周期 T のうちで，もっとも小さな正の値を基本周期という．

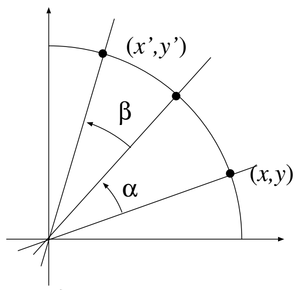
2. 三角関数の加法定理：※おぼえる必要はない．

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

回転の一次変換：※おぼえるならこちら．

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



β だけ回転した後に α 回転することは，$\alpha+\beta$ 回転することと同じである．そこで $R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$ を具体的に書いてみると，上に書いてある加法定理そのものが得られる．

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

β のかわりに $-\beta$ を代入し，

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta & \sin \text{ は奇関数（原点対称）：} f(x) = -f(x) \\ \cos(-\theta) = \cos\theta & \cos \text{ は偶関数（} y \text{ 軸対称）：} f(-x) = f(x) \end{cases} \tag{4}$$

であることを用いると，類似した公式が得られる．

3. 三角関数の合成（単振動の合成）

$\sin x$ と $\cos x$ のそれぞれの実数倍の和（1 次結合）

$$S = a\sin x + b\cos x \tag{5}$$

が与えられたとき，右辺を $\sqrt{a^2+b^2}$ でくくって

$$S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \tag{6}$$

と変形すると，$\sin x, \cos x$ の係数である $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とは，

$$\text{「2 乗の和」} = 1 \tag{7}$$

という関係を満たす．ゆえに，

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{かつ} \quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{8}$$

となる β が存在する．このような β に対し，式 (**??**) は

$$S \quad = \quad \sqrt{a^2+b^2}(\cos\beta\sin x+\sin\beta\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta) \tag{9}$$

と書き直せる．

また，

$$\sin\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{かつ} \quad \cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{10}$$

となる γ が存在する．このような γ に対し，式 (**??**) は

$$S \quad = \quad \sqrt{a^2+b^2}(\sin\gamma\sin x+\cos\gamma\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\ \cos(x-\beta) \tag{11}$$

と書き直せる．

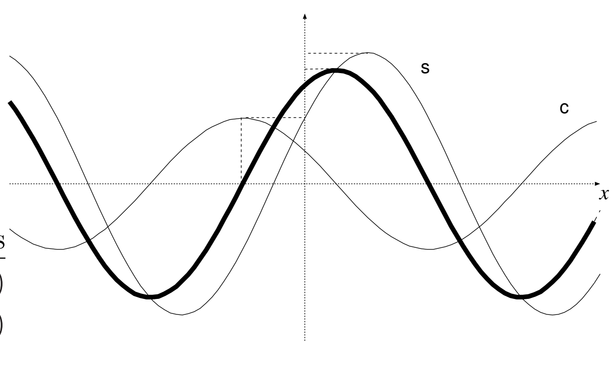
同じ周期で変動している正弦波（$a\sin x, b\cos x$）を重ね合わせた結果は，$\sin, \cos$ のどちらか一方でも表現できる．この場合はどちらも位相が 0 であった．位相が異なる場合はどうなるだろうか．

例

$$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3}),$$

という関数について，そのグラフがどうなるか考えよう．まず　$2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，$\cos(x+\frac{\pi}{3})$ という 2 つの正弦曲線（サインカーブ）を描き，それらを加え合わせると，どういう形になるか考えよう．

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad 2\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3}) \\ &= \quad 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\ &= \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x \\ &= \quad \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{12}$$



PSfrag replacements

$2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$2\cos(x+\frac{\pi}{3})$

```
%gnuplot
plot [-5:5][-3:3] 2*sin(x+pi/6), cos(x+pi/3), 2*sin(x+pi/6)+cos(x+pi/3)
```

振幅が 2 の正弦曲線と振幅が 1 の正弦曲線を加えあわせると，やはり正弦曲線が得られる．ただし，振幅は $1+2=3$ よりはるかに小さな $\sqrt{3}$ である．これは，2 つの波が重なりあう際に観察される現象を説明する数学的例である．

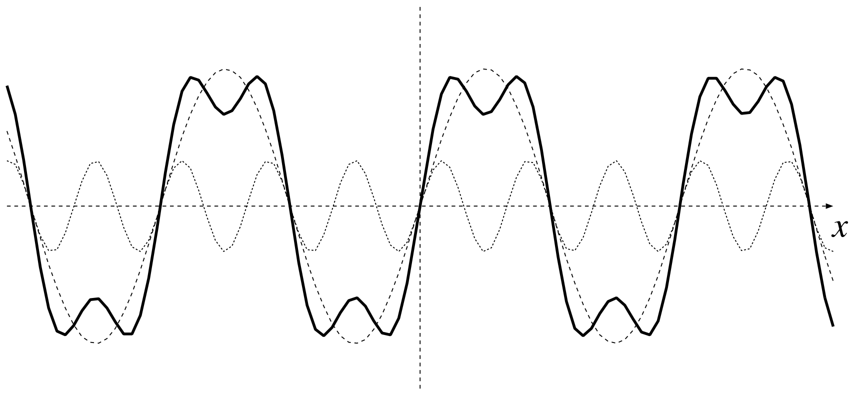
一般的に，
$$f(x) = 2\sin(x+\phi) + \cos(x+\theta)$$
の場合，加法定理を使って，
$$f(x) = 2(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + c_3 \cos x - c_4 \sin x \tag{13}$$
$$f(x) = (2c_1 - c_4)\sin x + (2c_2 + c_3)\cos x \tag{14}$$
と，同じ周期で初期位相 0 で変動する $\sin x, \cos x$ の和で書ける（c_1, c_2, c_3, c_4 は定数）．したがって加法定理を使って $A_1 \sin(x+\phi_1), A_2 \cos(x+\phi_2)$ のどちらか一方でも表現できる．ただし周期は同じであるが，振幅や位相は変わることに注意したい．

このように位相や振幅が異なる $\sin, \cos$ の一次結合で表現される波は，それぞれの周期が同じであれば結局，正弦波になることがわかる．同じ波を表現するのにいろいろな表現があり，まぎらわしいが利点が多いので，仕方なしとしよう．

周期が異なる場合はどうなるだろうか．基本周期はどうなるだろうか．

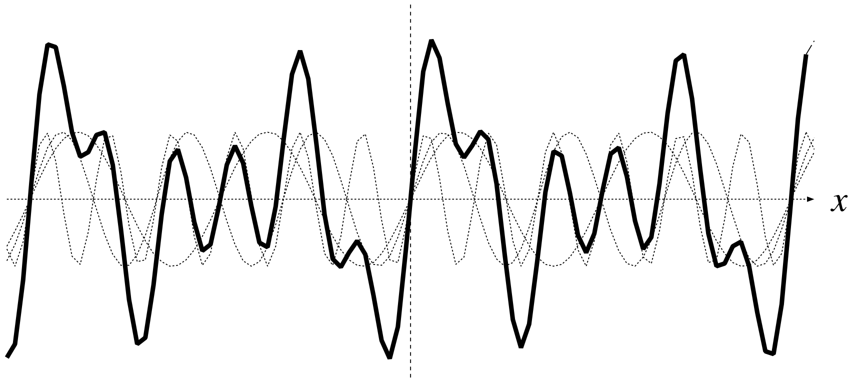
例

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$



例

$$f(x) = \sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}$$



周期の異なる正弦曲線の和は，一般に正弦曲線にはならない．