

## 数学の準備体操

**今日の目標** : 以下の事を理解する .

1. 波形 (関数, 信号) をベクトルと見ると, 長さや角度が定義できる .
2. 波形を正規直交基底を使って表現した場合, 各基底に対する成分は内積を使い表現できる .

### 3.2 信号の表現

$f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \dots$  アナログ信号  $f(t)$  の  $N$  点のサンプル値の系列

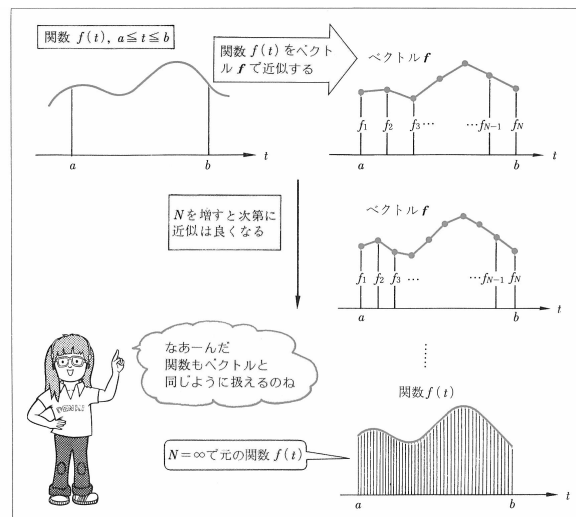


図 3-1 関数をベクトルで近似して表現する

### 3.3 2次元ベクトルの距離と内積

#### 復習

2次元ベクトル :  $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$

内積 :  $\langle f, g \rangle = f_1g_1 + f_2g_2$

$$\langle f, g \rangle = |f||g| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{|f||g|} \rightarrow -1 \leq \frac{\langle f, g \rangle}{|f||g|} \leq 1$$

これを教科書では相関係数  $r$  と呼んでいる .

自分自身との内積 ( $\cos 0 = 1$ )

$$\langle f, f \rangle = |f|^2 \rightarrow |f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

ノルム  $\|f\|$  : ベクトルの長さを一般化したもの .  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

直交 : 「二つのベクトル  $f$  と  $g$  が直交する」  $\leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$  ( $\theta = \pi/2$ )

### 3.4 正規直交基底

直交基底  $\{v_1, v_2\}$  によるベクトル  $f$  の表現

$$f = C_1v_1 + C_2v_2$$

$$\langle f, v_1 \rangle = C_1 \langle v_1, v_1 \rangle + C_2 \langle v_2, v_1 \rangle = C_1 \langle v_1, v_1 \rangle = C_1 \|v_1\|^2$$

係数  $C_1$  の求め方

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle = C_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 \rightarrow C_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle$$

$\mathbf{v}_1$  が単位ベクトル  $\|\mathbf{v}_1\|^2 = 1$  のときは  $C_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle$

正規直交基底の各基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる (教科書 p.37)

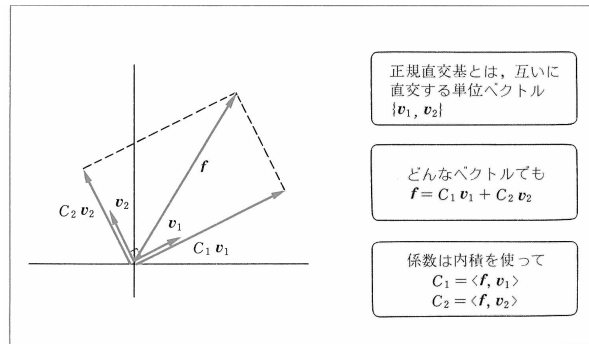


図 3・7 正規直交基底でベクトルを表す

3.5 多次元ベクトル空間から関数空間へ (自然に拡張する)

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^2}$$

$f(t)$  のある区間  $a < t < b$  でサンプル点  $N \rightarrow \infty$  を考える (無限次元空間, 関数空間)

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt}$$

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t) dt$$

$f(t)$  と  $g(t)$  が直交  $\leftrightarrow \langle f(t), g(t) \rangle = 0$

例:

関数  $f(t) = t$  と  $g(t) = 1$  は区間  $[-1, 1]$  で直交する .

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \langle t, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1$$

1. 図に示すように  $f(t)$  と  $g(t)$  の直線が垂直に交わっているわけではない .
2. 内積の値は, 内積をとる区間に依存する .

