情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 3 回
2006 年 10 月 18 日

数学の準備体操 その 2

今日の目標 ： 以下の事を理解する.

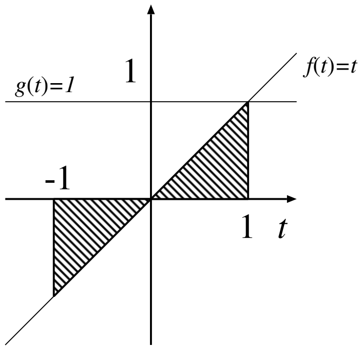
1.

復習

1. 波形（関数，信号）をベクトル $\boldsymbol{f}$ と見ると，長さや角度が定義できる.
2. $\boldsymbol{f}$ を正規直交基底を使って表現した場合，各基底に対する成分は内積を使い表現できる.

例:
関数 $f(t) = t$ と $g(t) = 1$ は区間 $[-1, 1]$ で直交する.

$$< f(t), g(t) >=< t, 1 >= \int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$



1. 図に示すように $f(t)$ と $g(t)$ の直線が垂直に交わっているわけではない.
2. 内積の値は，内積をとる区間に依存する.

3.6 正規直交関数系

$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$ $\cdots$ 信号 $f(t)$ の N 点のサンプル値の系列

直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_N\}$ によるベクトル $\boldsymbol{f}$ の表現

$$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + C_N\boldsymbol{v}_N$$

係数 C_1 は $\boldsymbol{f}$ の中に $\boldsymbol{v}_1$ 方向の成分がどれくらい含まれているかを示している.
係数 C_1 の求め方：$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{v}_1$ の内積をとればよい

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1 >= C_1 < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 > + C_2 < \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 > + \cdots + C_N < \boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_1 >= C_1 < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 >= C_1||\boldsymbol{v}_1||^2 = C_1$$

（$\boldsymbol{v}_2$ なども同様）
各正規直交基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる （教科書 p.37）

問

大きさが 1 で互いに直交するような関数の集合があればとても便利．そのようなものはあるか．どのようなものがあるか．

以下，この問を数式を使って定式化する．

$f(t), g(t), h(t), \cdots$ と書くと文字がなくなるので，$\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \cdots,$ と表現する．

$\phi_1(t)$ という表現に恐れず，縦に長いベクトルだと思っておけばよい．

・1. 互いに直交する：

$$< \phi_m(t), \phi_n(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

これが $m, n = 0, 1, 2, \cdots, m \neq n,\ a \leqq t \leqq b$ で成立する．

・2. 大きさ（ノルム）が 1：

$$< \phi_m(t), \phi_m(t) >= ||\phi_m(t)||^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)^2\mathrm{d}t = 1$$

これが $m = 0, 1, 2, \cdots, m \neq n,\ a \leqq t \leqq b$ で成立する．

まとめると

$$< \phi_m(t), \phi_n(t) >= \delta_{m,n}$$

と書ける．ここで

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ 1 & : m = n \end{cases}$$

正規直交関数系 $\{\phi_1(t), \phi_2), \cdots\}$ による任意の関数 $f(t)$ の表現

$$f(t) = C_0\phi_0 + C_1\phi_1 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k(t)$$

係数 C_k は $f(t)$ の中に ϕ_k の成分がどれくらい含まれているかを示している．

係数 C_1 の求め方：$f(t)$ と ϕ_1 の内積をとればよい

$$\begin{aligned} < f(t), \phi_1 > &= < C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + \cdots + C_k\phi_k,\ \phi_1(t) > \\ &= C_0 < \phi_0(t), \phi_1(t) > + C_1 < \phi_1(t), \phi_1(t) > + \cdots + C_k < \phi_k, \phi_1(t) > \\ &= C_1 < \phi_1(t), \phi_1(t) >= C_1||\phi_1(t)||^2 = C_1 \end{aligned}$$

（ どの $< f(t), \phi_k >$ についても同様）

問

大きさが 1 で互いに直交するような関数にはどのようなものがあるか．

区間 $[-\pi, \pi]$ における $\{1, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cdots\}$

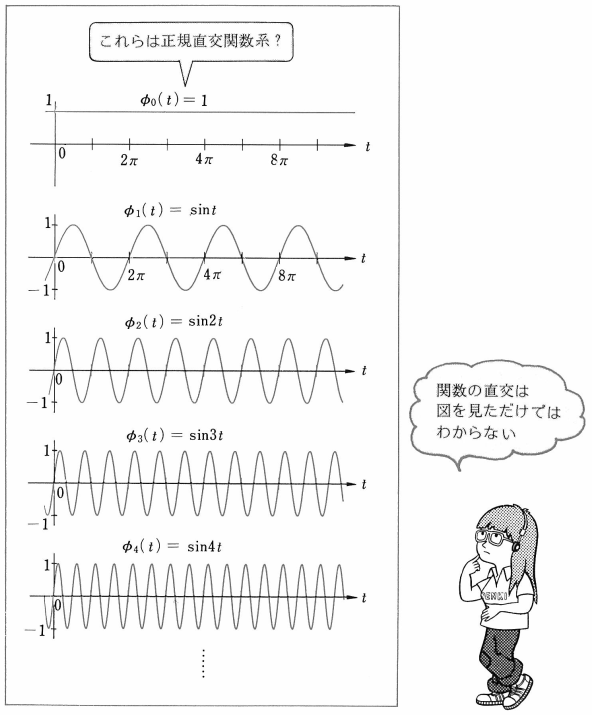


図 3・10　正規直交関数系の判定をしてみる

この図が示す通り,「関数の直交は図を見ただけでは分からない」

大きさが 1 でないベクトルの，方向を変えずに大きさを 1 にする方法

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例.　$\boldsymbol{x} = (1, 2)^{\mathrm{T}}, ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} == \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) == (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

大きさが 1 になっている.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

教科書 p.50 の演習問題をしておく.