情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 4 回
2006 年 10 月 25 日

フーリエ級数 その 1

$\boxed{\text{今日の目標}}$： フーリエ級数

$$f(x) \approx a_0' + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

とは何かを知り，具体的に $\sin x, -\pi \leqq x < \pi$ のフーリエ級数を求めることができるようにする．
いろいろ疑問がでてくるが，それを一つづつ解消していく．疑問点をノートに書いておくと，あとで為になる．

復習

1. 波形（関数，信号）をベクトル $\boldsymbol{f}$ と見ると，長さや角度が定義できる．
2. $\boldsymbol{f}$ を正規直交基底を使って表現した場合，各基底に対する成分は内積を使い表現できる．

問

大きさが 1 で互いに直交するような関数にはどのようなものがあるか．

区間 $[-\pi, \pi]$ における $\{1, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cdots\}$ を考えてみる．

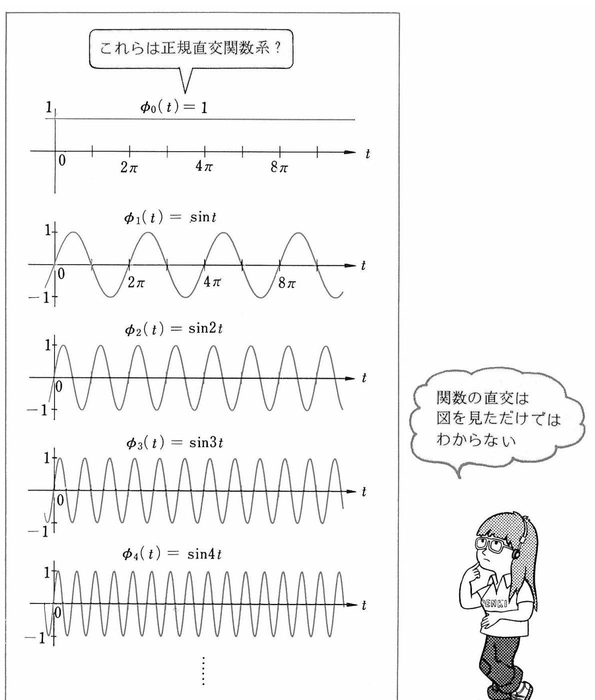

図 3・10 正規直交関数系の判定をしてみる

この図が示す通り,「関数の直交は図を見ただけでは分からない」

区間 $[-\pi, \pi]$ における $\{1, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cdots, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \cdots\}$ を考えてみる．

三角関数（基底）の直交性

区間 $(-\pi,\pi)$ （1 周期）で考える． 以下では，k,m,n は整数．

$$(1,\sin x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin x dx=[-\cos x]_{-\pi}^{\pi}=-[\cos x]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\sin kx)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin kx dx=\left[-\frac{1}{k}\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}[\cos x]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\cos x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos x dx=[\sin x]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\cos kx)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos kx dx=\frac{1}{k}[\sin kx]_{-\pi}^{\pi}=0$$

（面積を考えれば 0 になる）

$$\begin{aligned}(\cos mx,\cos nx) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx && (1)\\ &= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx && (2)\\ &= \frac{\pi}{4}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} && (3)\\ &= 0 && (4)\end{aligned}$$

$$(\sin x,\cos x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}（\text{奇関数}）\times（\text{遇関数}）\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}（\text{奇関数}）\mathrm{d}x=0$$

脱線（計算テクニック）

奇関数： $f(-x)=-f(x)$

偶関数： $g(-x)=g(x)$

問： $h(x)=f(x)g(x)$ は奇関数，偶関数のどちらになるか．

1. $h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)\rightarrow$ 奇関数 $\times$ 偶関数 $=$ 奇関数
2. $f_1(-x)f_2(-x)=(-f_1(x))(-f_2(x))=f_1(x)f_2(x)\rightarrow$ 奇関数 $\times$ 奇関数 $=$ 偶関数

ノルム

$$||1||^2=(1,1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot1\ dx=[x]_{-\pi}^{\pi}=1$$

$$\begin{aligned}||\cos kx||^2 &= (\cos kx,\cos kx) && (5)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx && (6)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2kx+1}{2}dx && (7)\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2k}\sin 2kx+x\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2} && (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\sin kx||^2 &= (\sin kx, \sin kx) &(9)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx &(10)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx &(11)\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[x-\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} &(12)\end{aligned}$$

$$||f(x)||^2 = (f(x), f(x)) = \int_a^b f(x)^2 dx$$

大きさが 1 でないベクトルの，方向を変えずに大きさを 1 にする方法

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例．　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

大きさが 1 になっている．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$||\sin kx|| = ||\cos kx|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって区間 $[-\pi, \pi]$ における $\{1, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin 2t, \sqrt{2}\sin 3t, \cdots, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos 2t, \sqrt{2}\cos 3t, \cdots\}$ が正規直交関数系になっている．

周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数（教科書 p.66, 67）

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + a_2\cos 2t + \cdots + b_1\sin t + b_2\sin 2t + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \mathrm{d}x,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

※ 係数の意味： $\cos kx, \sin kx$ が基底で，a_k, b_k は $f(x)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）．