

## フーリエ級数 その 2

### 今日の目標

いくつかの関数について具体的にフーリエ級数を求める。

### 復習

1. フーリエ級数の見方： $f(x)$  を正規直交基底  $\cos kt, \sin kt$  の線形結合で表現
2.  $a_k, b_k$  は  $f(t)$  の各基底成分（基底と内積をとった値）。

関数  $f(x)$  のフーリエ級数（教科書 p.66, 67）

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

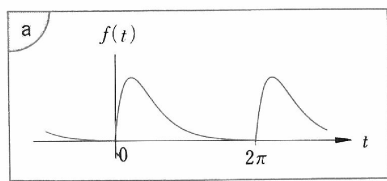
注意点：教科書 p.68 図 5.2

- $\frac{a_0}{2}$  : 直流成分
- 上記のフーリエ級数の基本周期は  $2\pi \implies$  フーリエ級数展開は、周期関数を表現

例 のこぎり波：区間  $-\pi \leq t < \pi$  において  $f(t) = t$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos kt \, dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数}) \times (\text{偶関数}) \, dt && (1) \\ &= 0 && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt \\ &= 0 && (3) \end{aligned}$$



この信号を  
フーリエ級数  
に展開すると

いろいろな  
周波数の正  
弦波に分解  
される

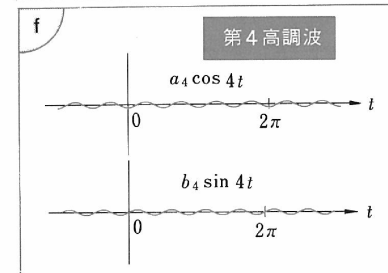
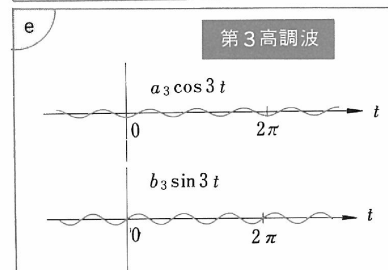
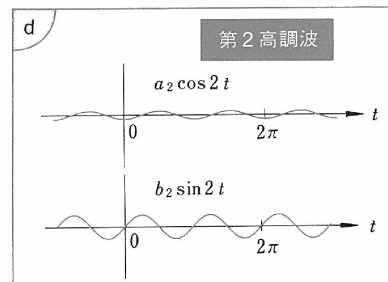
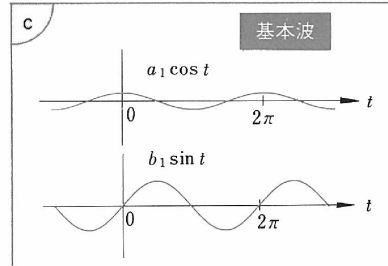
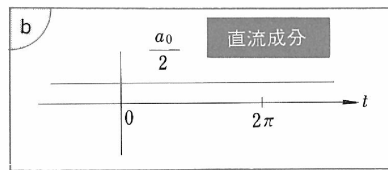
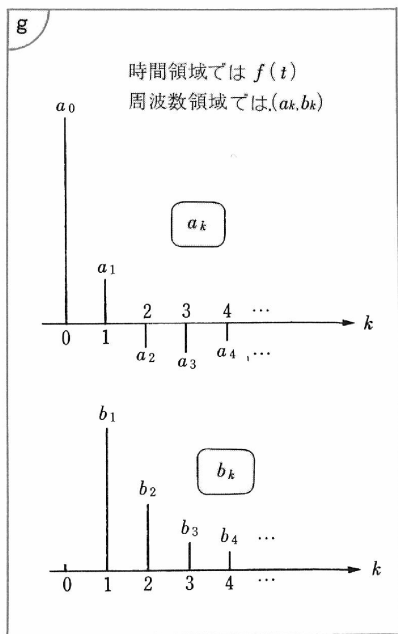


図 5・2 信号の分解

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数}) \times (\text{奇関数}) \, dt \tag{4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt \tag{5}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left[ -\frac{1}{k} \cos kt \right]' \, dt \tag{6}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{t}{k} \cos kt \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left[ -\frac{1}{k} \cos kt \right] \, dt \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{t}{k} \cos kt \right]_0^{\pi} + \left[ \frac{1}{k^2} \sin kt \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{2(-\pi)}{\pi k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} \cos k\pi$$

$\cos k\pi, k = 0, 1, 2, \dots \implies 1, -1, 1, -1, \dots$  である .  $\implies (-1)^k$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
f(t) = t &\approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kt \\
&= 2 \left( \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \dots \right)
\end{aligned}$$

例 区間  $[-\pi, \pi]$  で  $f(t) = t^2$  となる周期  $2\pi$  の関数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos kt \, dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数}) \times (\text{偶関数}) \, dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt \, dt,$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \left[ \frac{1}{k} \sin kt \right]' \, dt,$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ t^2 \frac{1}{k} \sin kt \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \frac{1}{k} \sin kt \, dt \right\}$$

$$= -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt$$

$$= -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} t \left[ -\frac{1}{k} \cos kt \right]' \, dt$$

$$= -\frac{4}{k\pi} \left\{ \left[ -\frac{t}{k} \cos kt \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{k} \cos kt \, dt \right\}$$

$$= \frac{4}{k\pi} \left\{ \frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{t} \sin kt \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

$k$  で割っていたので,  $k = 0$  のときは別に計算する必要がある.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \pi^3 = \frac{2}{3} \pi^2 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin ntdt, \quad k = 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数}) \times (\text{奇関数}) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kt \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kt \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos t + \cos 2t - \frac{4}{9} \cos 3t + \frac{4}{16} \cos 4t + \dots \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \frac{\cos 4t}{4^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

このように計算は大変面倒である...

## 5.2 偶関数と奇関数

### 5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が $2\pi$ でない場合

来週

複素フーリエ級数