情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 6 回
2006 年 11 月 8 日

フーリエ級数 その 3

今日の目標

複素数の演算法（復習）
複素フーリエ級数

復習

1. 小テストの内容 （関数の直交とは． 内積で係数をもとめる）．
2. フーリエ級数の見方：$f(x)$ を正規直交基底 $\cos kt, \sin kt$ の線形結合で表現
3. a_k, b_k は $f(t)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）．

復習： 関数 $f(t) = |t|$ のフーリエ級数（教科書 p.70）

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

例 三角波： 区間 $-\pi \leqq t < \pi$ において $f(t) = |t|$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\times(\text{偶関数})dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos kt dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \end{aligned}$$

※ k が奇数のときだけ係数が 0 でなくなる．

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\times(\text{奇関数})dt = 0$$

5.2 偶関数と奇関数

教科書の記述がすばらしい．

偶関数と奇関数

1. 偶関数のフーリエ級数は cos の項のみで表され,
2. 奇関数のフーリエ級数は sin の項のみで表される.

p.70 の例題を計算する前に分かること： $f(t) = |t|$ は偶関数より $f(t)$ は cos 項のみで表現できるはず.

5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が 2π でない場合

基本周期が T の関数を表現したい場合

1. 基本周期が T になるよう変数 t を線形変換 $t \to \dfrac{2\pi}{T}t$ すればよい.

   $\cos t$ は周期 2π, $\cos \dfrac{2\pi}{T}t$ は周期 T.

2. 積分区間を 1 周期分とる.（ $-\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2}$, $0 < t < T$ など）

5.4 複素フーリエ級数展開

本質的にフーリエ級数と同じ

周期 2π の関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \\
&= \cdots + C_{-3}e^{-3jt} + C_{-2}e^{-2jt} + C_{-1}e^{-jt} + C_0 + C_1 e^{jt} + C_2 e^{2jt} + C_3 e^{3jt} + \cdots \\
C_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt}dt
\end{aligned}
$$

$$e^{jkt} = \cos(kt) + j\sin(kt) \quad \text{：オイラーの公式}$$

複素数と複素平面： すべて図をイメージして意味を理解する

1. 複素数 $z = \alpha + j\beta = |z|e^{i\theta}$ （教科書では $\theta = \angle z$）
2. 複素平面：複素数は 2 次元の実ベクトル (α, β), 実部 α, 虚部 β

$$
\begin{cases}
\alpha \text{ を } z \text{ の実部 (real part)} & \alpha = \mathrm{Re}[z] \\
\beta \text{ を } z \text{ の虚部 (imaginary part)} & \beta = \mathrm{Im}[z]
\end{cases}
$$

   と呼び, それらを, それぞれ $\mathrm{Re}[\alpha]$, $\mathrm{Im}\,[\alpha]$ と表す.

3. 絶対値（振幅）$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 偏角（位相）$\theta = \arg(z)$

4. 複素数の積 （絶対値どうしをかけて偏角は足す）

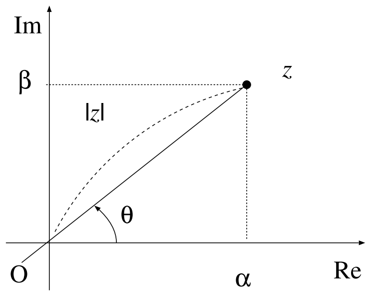
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\arg(z_1)+\arg(z_2))}$$

5. $|z|^2 = z\bar{z} = (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2$

6. オイラーの公式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　　　（不思議な式： $e^{i\pi} = -1$）

7. 1 の n 乗根： $\alpha^n = 1$ （単位円を n 分割した図をイメージ）

複素平面



複素数 $z = \alpha + j\beta$ （α, β は実数）に対して，座標平面の点 (α, β) が対応．この平面を複素平面またはガウス平面と呼ぶ．横軸，縦軸は，それぞれ実軸，虚軸と呼ばれる．複素数は，2 次元の実数と思えば良い．