

## フーリエ級数展開 その 4 複素フーリエ級数の実例

### 今日の目標

複素フーリエ級数

復習

1. 複素数

### 5.2 偶関数と奇関数

教科書の記述がすばらしい.

偶関数と奇関数

1. 偶関数のフーリエ級数は  $\cos$  の項のみで表され,
2. 奇関数のフーリエ級数は  $\sin$  の項のみで表される.

p.70 の例題を計算する前に分かること:  $f(t) = |t|$  は偶関数より  $f(t)$  は  $\cos$  項のみで表現できるはず.

### 5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が $2\pi$ でない場合

基本周期が  $T$  の関数を表現したい場合

1. 基本周期が  $T$  になるよう変数  $t$  を線形変換  $t \rightarrow \frac{2\pi}{T}t$  すればよい.  
 $\cos t$  は周期  $2\pi$ ,  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  は周期  $T$ .
2. 積分区間を 1 周期分とる ( $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ ,  $0 < t < T$  など)

### 5.4 複素フーリエ級数展開

本質的にフーリエ級数と同じ

周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  に対する複素フーリエ級数

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \\ &= \cdots + C_{-3} e^{-3jt} + C_{-2} e^{-2jt} + C_{-1} e^{-jt} + C_0 + C_1 e^{jt} + C_2 e^{2jt} + C_3 e^{3jt} + \cdots \\ C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt \end{aligned}$$

$$e^{jkt} = \cos(kt) + j \sin(kt) : \text{オイラーの公式}$$

## 複素フーリエ級数展開を導く

複素数の値をもつ関数（複素関数） $f(t), g(t)$  の内積の定義

ある区間  $[a, b]$  において複素数値の関数  $f, g$  に対して，次のような積分によって決まる複素数を  $(f, g)$  と表し， $f$  と  $g$  の内積と呼ぶ．

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \overline{\frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt} = \overline{\langle g(t), f(t) \rangle}$$

### 直交性

例： $e^{-j3t}$  と  $e^{jt}$  が区間  $-\pi < t < \pi$  で直交していることを示す．

(内積  $\langle e^{-j3t}, e^{jt} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j3t} e^{jt} dt = 0$  を示せばいい.)

$$\begin{aligned} \langle e^{-j3t}, e^{jt} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j3t} e^{jt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j4t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 4t - i \sin 4t\} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos 4t dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} [\sin 4t]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

一般の  $n, m, n \neq m$  の場合も，上のような計算になることは簡単に確かめることができる．

例：基底のノルム． $e^{-j3t}$  の区間  $-\pi < t < \pi$  でのノルムを求める．

$$\begin{aligned} \langle e^{-j3t}, e^{-j3t} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j3t} e^{j3t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

一般の場合も，上のような計算になることは分かる．

目標：図 5.13 が理解できれば OK！

## フーリエ級数の計算例 (p.84)

周期  $T$  の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

を複素フーリエ級数展開する． $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  の一周期で考える．

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 dt = \frac{2}{T} \\
C_k &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{-j2\pi kt/T} dt \\
&= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-1}^1 \cos\{2\pi kt/T\} dt - j \int_{-1}^1 \sin\{2\pi kt/T\} dt \right\} \\
&= \frac{2}{T} \int_0^1 \cos\{2\pi kt/T\} dt \\
&= \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi k} [\sin\{2\pi kt/T\}]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi k} \sin\{2\pi k/T\}
\end{aligned}$$

したがって  $f(t)$  の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin\{2\pi k/T\} e^{jkt}$$

となる。