情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 8 回
2006 年 11 月 22 日

フーリエ級数展開 その 5 フーリエ級数展開の重要な性質

今日の目標

パーシバルの定理

復習

1. 5.2 偶関数と奇関数
2. 5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が 2π でない場合
3. 5.4 複素フーリエ級数展開
   目標： 図 5.13 が理解できれば OK！

本日行なう項目は，教科書に分かりやすい記述があるため，このノートは補足程度.

5.5 パーシバルの定理

パーシバルの定理

$$||f(t)||^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

周期 2π の関数 $f(t)$ を考える.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} && (1)\\
< f(t), f(t) > &= ||f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt && (2)\\
< \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{jlt} > &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} < C_k e^{jkt}, C_l e^{jlt} > && (3)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k \overline{C_l} < e^{jkt}, e^{jlt} > && (4)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}\overline{C_l e^{jlt}} && (5)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \overline{C_k} && (6)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 && (7)
\end{aligned}$$

図 5.15（p.86） を理解する.

5.6 フーリエ級数展開の実例

5.7 フーリエ級数展開の重要な性質

1. 近似の誤差は
2. 不連続点では
3. 信号の大きさが変わると
4. 二つの信号を加えると
5. 信号を移動すると

補足： 完全性とは（教科書には説明されていない）

基底としてある直交関数系をとったとする．今の場合，$1, \cos kt, \sin kt, n = 1, 2, \cdots$．ここで，ある関数 $f(t)$ がすべての基底関数と直交するのが，$f(t) = 0$ だけのとき，この直交関数系は完全であるという．

完全ではない例：

$$\{\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cdots\}$$

この基底関数（基底ベクトル）は直交系をなすが，例えば $f(t) = \cos t$ は，どの基底ベクトルとも直交する（係数 $b_n = 0, n = 1, 2, \cdots$）．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|b_n|^2\right) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

左辺は 0 となる．一方 $f(t) = \cos t$ なので，右辺は値をもつ．上の等式は実は成り立たない．ここから，この基底ベクトルの組が完全ではないことがわかる．

来週

7.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ
7.2 フーリエ変換の性質

補足.
複素フーリエ級数展開の例：
例 1：
周期 2π の関数 $f(t) = t$ の複素フーリエ級数を区間 $-\pi < t \leqq \pi$ で求める．
$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}$ と複素フーリエ級数表現するとき，その係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

と計算できる．具体的には,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0 \Longrightarrow \text{平均値に対応} \\
C_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-jkt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(\cos kt - j\sin kt\right)dt \\
&= \text{（奇関数} \times \text{偶関数} = \text{奇関数）} \\
&= -\frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin kt dt \\
&= -\frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{t\left(-\frac{1}{k}\cos kt\right)'\right\}dt \\
&= \frac{j}{k\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{t\left(\cos kt\right)'\right\}dt \\
&= \frac{j}{k\pi}\left\{\left[y\cos kt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos kt dt\right\} \\
&= \frac{j}{n\pi}\left[t\cos kt\right]_0^{\pi} = \frac{j}{k\pi}\pi\cos n\pi = j\frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}
$$

したがって $f(t)$ の複素フーリエ級数表現は

$$
f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} j\frac{(-1)^k}{k}e^{jkt}
$$

となる．

<u>例 2</u>：

周期 2π の関数

$$
f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t \leqq 0 \\ 1, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}
$$

を複素フーリエ級数展開する．

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)dt + \int_0^{\pi} dt\right\} = 0 \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} e^{-ikt}dt + \int_0^{\pi} e^{-ikt}dt\right\}
\end{aligned}
$$

こう進めてもいいが，$f(t)$ は奇関数なので，その特徴を活かすべく，偶関数と奇関数に分解．

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - i\sin kt)dt \\
&= -\frac{i}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\sin kt dt\right\} \\
&= \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos kt\right]_0^{\pi} = \frac{i}{n\pi}((-1)^n - 1) \text{ ※ } n \text{ が偶数のとき } 0,\ n \text{ が奇数のとき } -2
\end{aligned}
$$

したがって $f(t)$ の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{ikt} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} i\frac{2}{(2m-1)\pi} e^{i(2m-1)t}$$

となる．よくわからないので具体的に $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 代入して分解してみよう．

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{ikt} \\ &= \cdots + i\frac{2}{5\pi}e^{-i5t} + i\frac{2}{3\pi}e^{-i3t} + i\frac{2}{\pi}e^{-it} - i\frac{2}{\pi}e^{it} - i\frac{2}{3\pi}e^{i3t} - i\frac{2}{5\pi}e^{i5t} + \cdots \end{aligned}$$

これは例えば

$$i\frac{2}{5\pi}e^{-i5t} - i\frac{2}{5\pi}e^{i5t} + \cdots = \frac{i2}{5\pi}\{e^{-i5t} - e^{i5t}\} = \frac{i2}{5\pi}\{-2i\sin 5t\} = \frac{4}{5\pi}\sin 5t$$

となるので，

$$f(t) \sim \cdots + \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\sin 5t + \cdots$$

これは，もちろん通常のフーリエ級数と同じになる．（教科書 p.15 式 1.34）

例 3：

周期 2π の関数 $f(t) = t^2$ の複素フーリエ級数を区間 $-\pi < t \leq \pi$ で求める．
$f(t)$ を $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ikt}$ と複素フーリエ級数表現するとき，その係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

と計算できる．具体的には，

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\left(-\frac{1}{in}e^{-ikt}\right)' dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[t^2\left(-\frac{1}{in}e^{-ikt}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t\left(-\frac{1}{in}e^{-ikt}\right)dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi^2}{in}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2\sin n\pi}{n} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(-\frac{1}{in}e^{-ikt}\right)' dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2}{n}\sin n\pi + \left[\frac{2te^{-ikt}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n^2}e^{-ikt}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2}{n^2}[\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}] + \frac{2}{in^3}[e^{-ikt}]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{4i}{n^3}\sin n\pi\right\} \\ &= \frac{2\cos n\pi}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

したがって $f(t)$ の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{ikt}$$

となる．