情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 9 回
2006 年 11 月 29 日

フーリエ変換 その 1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

今日の目標

復習

1. 5.5 パーシバルの定理
2. 周期
   今までは表現したい関数（信号）の周期が 2π であると仮定してきた．周期的でない信号を扱いたい場合，どうするればばいいか．$\Longrightarrow$ 周期 $T = \infty$ と考えればよい．

   （基本周期：t が 0 からどこまで変われば cos の中身が 2π 変化するか）

	基本周期
$\cos t$	2π
$\cos(\frac{2\pi}{T}t)$	T

以下の項については，教科書に分かりやすい記述がある．このノートは補足程度．

7.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

$\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ を使って関数 $f(t)$ を表現し，T を ∞ にする．

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t},\ C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt$$

$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}$ と書くと，これは

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t},\ C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_k t}dt$$

と書ける．いきなりではあるが，フーリエ変換の式と見比べてみる．

$$\text{フーリエ逆変換}: f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \text{フーリエ変換}: F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

フーリエ級数の式で，$\frac{1}{2\pi}$ との対応をつけるため，$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}, C_k = \frac{F(\omega_k)}{T}$ と書くと，これは

$$f(t) = \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_k)}{T} e^{j\omega_k t}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k)e^{j\omega_k t}\Delta\omega$$

フーリエ変換の式は各基底ベクトル $e^{j\omega t}$ と関数 $f(t)$ の内積の式であり，角周波数成分を求める式になっている．フーリエ逆変換は，各基底ベクトル $e^{j\omega t}$ にその周波数成分の重み $F(\omega)$ をかけて足しあわせたもので $f(t)$ を再構成する式である．

複素フーリエ級数と，式を比較してみる．フーリエ逆変換はこれにそっくり．$k \to \omega, C_k \to F(\omega)$ になっている．離散変数が連続変数になっている．

一般に $F(\omega)$ は複素数値関数.
ω は連続角周波数（実数）.
フーリエ変換は，絶対積分可能

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

であるときに存在する.

$\boxed{\text{フーリエ変換とフーリエ逆変換の大雑把な理解}}$

1. <u>1 対 1 の変換</u>　$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $-\infty < t, \omega < \infty$ （逆変換すればもとに戻せる）
   2 次元平面に漂う一本のヒモが，3 次元空間に漂う一本のヒモに変換される.
   横軸 t, ω は $-\infty$ から ∞ に走るので，$\vec{f} \leftrightarrow \vec{F}$ という表現もできる.
2. 例： 音声信号のような 1 次元の実数値関数 $f(t)$ は 2 次元平面上に 1 本の曲線として表現されている．その $f(t)$ フーリエ変換 $F(\omega)$ は，3 次元空間中に漂う 1 本の曲線で表現される．線から線への一対一の写像（線を点とみる）になっている.
3. 同じ実体について（2 つの）異なった表現方法がある：時間領域での表現 $f(t)$ と周波数領域での表現 $F(\omega)$.
4. フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

   $F(\omega)$ は通常，複素数値をもつ関数になる.
5. フーリエ逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

6. 良く見れば行列との対応関係がとれる：フーリエ変換は線形代数で考えると行列とベクトルの積

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = f_1 \boldsymbol{e}_1 + f_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + f_n \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1 t_1} & e^{-j\omega_1 t_2} & \ldots & e^{-j\omega_1 t_n} \\ e^{-j\omega_2 t_1} & e^{-j\omega_2 t_2} & \ldots & e^{-j\omega_2 t_n} \\ \vdots & & & \\ e^{-j\omega_n t_1} & e^{-j\omega_n t_2} & \ldots & e^{-j\omega_n t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

（この n^2回 の掛け算を $n/2 \log_2 n$ 回で済ませるのが高速フーリエ変換）

<u>フーリエ変換の計算</u>

※ 教科書の図を注意してみる．$f(t)$ は実数値関数であるので $-\infty < t < \infty$ で 2 次元の図で書ける．一方，$F(\omega)$ は複素数値関数であり，$-\infty < \omega < \infty$ で 3 次元のグラフなる.

1a)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\
&= -\frac{1}{a + i\omega} \left[e^{-(a+i\omega)t} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{a + i\omega} \left[e^{-at} e^{-i\omega t)} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{a + i\omega} \left[e^{-at} (\cos\omega t - i \sin\omega t) \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{a + i\omega} \\
&= \frac{a - i\omega}{(a + i\omega)(a - i\omega)} \\
&= \frac{a - i\omega}{(a^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

2)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換（教科書 p,125. 図 7.2 g,h に $a = 1$ のときの図が掲載されている）.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-a}^{a} (\cos\omega t - i \sin\omega t) dt \\
&= 2 \int_0^a (\cos\omega t) dt \\
&= \frac{2}{\omega} [\sin\omega t]_0^a \\
&= \frac{2}{\omega} \sin\omega a \\
&= \frac{2a}{a\omega} \sin\omega a = 2a \text{ sinc } a\omega
\end{aligned}$$

偶然, $F(\omega)$ が実数値関数になっている.

来週

7.2 フーリエ変換の性質