情報システム工学科
伊達 章

フーリエ変換 その 2　　7.2 フーリエ変換の性質

$\boxed{\text{今日の目標}}$

復習： フーリエ変換

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad F(\omega) \text{ は通常，複素数値をもつ関数になる．}$$

フーリエ逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

フーリエ変換の計算

※ 教科書の図を注意してみる．

・ $f(t)$ は実数値関数であるので横軸 $-\infty < t < \infty$ で 2 次元の図で書ける．

・ 一方，$F(\omega)$ は複素数値関数であり，横軸 $-\infty < \omega < \infty$ で 3 次元のグラフなる．

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & t \geqq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

のフーリエ変換.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-3t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}dt \\
&= -\frac{1}{3+j\omega}\left[e^{-(3+j\omega)t}\right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{3+j\omega}\left[e^{-3t}e^{-j\omega t)}\right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{3+j\omega}\left[e^{-3t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{3+j\omega} \\
&= \frac{3-j\omega}{(3+j\omega)(3-j\omega)} \\
&= \frac{3-j\omega}{9+\omega^2}
\end{aligned}$$

グラフを書くには 2 つの流儀がある．

$$\text{実部}\ \ \mathrm{Re}[F(\omega)] = \frac{3}{9+\omega^2},\ \text{虚部}\ \ \mathrm{Im}[F(\omega)] = \frac{-\omega}{9+\omega^2}$$

$$\text{振幅スペクトル}\ |F(\omega)| = \frac{\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}},\ \text{位相スペクトル}\ \arg F(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{3}\right)$$

$\tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{3}\right)$ は，$\tan\theta$ の値が $-\frac{\omega}{3}$ のときの θ の値（ただし $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき）．

教科書 p.83 の図 5.13 参照． $\arg\, F(\omega) = \tan^{-1}$ としているが，これは，たまたま $F(\omega)$ の実部が正だったため．負の場合は $F(\omega) = -\tan^{-1}$ となる．じっくり絵を書いて考える．

今日

これらについては教科書にとても分かりやすい記述がある．

7.2 フーリエ変換の性質

1. 線形性
2. 波形の移動
3. 相似
4. パーシバルの定理

フーリエ変換の性質

- 線形性 (重ね合せの原理)

$$af(t) + bg(t) \quad \rightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{af(t) + bg(t)\} e^{-i\omega t} dt = aF[\omega] + bG[\omega]$$

もっとも基本的な性質．フーリエ変換したい関数・信号が，フーリエ変換をしたらどうなるかわかっている関数・信号に分解できたら，解析はやさしくなる．

- 波形の移動.（変数シフト：時間シフト，空間シフト）

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(\omega) \\ \mathcal{F}[f(t-t_0)] &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

これは重要．代数的にわかりやすい．複素数 $e^{-j\omega t_0}$ を掛け算することは，相手 $(F(\omega))$ の大きさを 1 倍し，時計回りに ωt_0 だけ回転させることである．つまり，$f(t)$ の時間を横にずらした信号 $f(t-t_0)$ をフーリエ変換しても，その位相スペクトルは変化するが，振幅スペクトルは変化しない．音声信号の解析には，$F(\omega)$ の振幅 (絶対値）がよく使われるが，いつしゃべろうとも，振幅スペクトルは変化しない．これがフーリエ変換の性質で，音声信号の解析によくフーリエ変換が使われる理由である．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \text{ のとき}$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

をもとめる．$t - t_0 = t'$ とおくと，

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega(t'+t_0)} dt'$$

$$G(\omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

複素数の掛け算を思い出す．$e^{-j\omega t_0} = \cos(\omega t_0) - \sin(\omega t_0)$，$|e^{-j\omega t_0}| = 1$，$\mathrm{Arg}\{e^{-j\omega t_0}\} = -wt_0$

- 相似性

  信号 $f(t)$ のフーリエ変換した結果が $F(\omega)$ だとする．
  信号 $f(t)$ を $f(at)$，a は定数，と t 軸方向にそれぞれ縮小（拡大）した場合，そのフーリエ変換した結果は，$F(\omega)$ を ω 軸方向ににについてそれぞれ拡大（縮小）したものになる．

$$f(at) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

  ここで a は定数．$a > 1$ のとき時間 (空間）領域では信号は縮む．フーリエ変換をおこない周波数軸 ω でみると広がる．$a = 2$ のように代入して図を書いてみればよくわかる．$a < 1$ のときは逆．

- 周波数シフト

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] \quad = \quad F(\omega - \omega_0)$$

  これは周波数スペクトルを ω_0 だけ右にずらす操作．音声などの信号を想像すると，実数に複素数を掛け算するから実体としてはなんだかよくわからなくなる，実は，この性質は，無線通信において使用されている．信号 $f(t)$ に単に $e^{j\omega_0 t}$ を掛けた $f(t)e^{j\omega_0 t}$ では複素数の信号となってしまい実現できない．そこで cos や sin がこの形 ($e^{j\omega_0 t}$) の和や差で表現できることを思いだす．具体的には，もとの信号 $f(t)$ に，たとえば，$f(t)\cos t(\omega_0 t) = 1/2 f(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ と掛け算する．これを変調という．復調はどうするか．実は，変調のときに使用した信号 (搬送波という．ここでは $\cos(\omega_0 t)$ ）と同じものを掛けてやれば，もとにもどる．その際，周波数領域でみると $2\omega_0$ 倍,$-2\omega_0$ 倍のところにもでてしまう．それはローパスフィルターで高周波成分を取り除いてやればいい．

- 微分，高階微分

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= j\omega F(\omega) \\ \mathcal{F}[f^{(t)}(t)] &= (i\omega)^t F(\omega)\end{aligned}$$

  定義にしたがって計算してみる．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \left[f(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= j\omega F(\omega) \qquad (1)\end{aligned}$$

  ここで $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ を使った．この性質のおかげで微分方程式が代数方程式になる．

- 対称性

$$g(t) \equiv F(t) \quad \rightarrow \quad G(\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

  フーリエ変換したい関数を $g(t)$ とする．この $g(t)$ が，ある関数 $f(t)$ をフーリエ変換した結果 $F(\omega)$ と同じ形になっているとき，つまり $g(t) = F(t)$ のとき，わざわざ定義にもどって計算しなくてもいい．