情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 13 回
2007 年 1 月 10 日

線形システムの解析

今日の目標

線形時不変システム，インパルス応答，周波数特性，伝達関数，周波数特性の振幅と位相

8.1 線形システム解析へのアプローチ

線形時不変システム

- システムとは：$x(t)$ という信号が入力された場合，信号 $y(t)$ を出力する装置のこと．

$$S : x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = S[x(t)], \; -\infty < t < \infty \tag{1}$$

  （システムとは何か，ということを深く考えることはしない）

- システム解析の目的： 入力 $x(t)$ から出力 $y(t)$ を予測すること．

  それには，あらかじめ何か信号を入力しておいて，出力を観測する必要がある．ありとあらゆる入力をシステムに入力し，出力を観測すれば，システムの特性はわかるが，それは大変であるし，なにより不可能である．

  実は，ある入力に対する出力さえ調べておけば，システムの特性がすべてわかる．

  $\Longrightarrow$ その入力がインパルス．

- 線形システムの定義

$$\begin{aligned} S[x_1(t)] &= y_1(t) & (2)\\ S[x_2(t)] &= y_2(t) \text{ とすると} & (3)\\ S[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)] &= a_1S[y_1(t)]+a_2S[y_2(t)] & (4)\\ &= a_1y_1(t)+a_2y_2(t) & (5)\end{aligned}$$

  異なる入力が互いに影響をあたえることはない．出力は，それぞれの出力の重ね合せ．したがって，入力信号をあらかじめ取り扱いやすい特別な信号の和に分解して表現しておけばいい．では，その特別な信号とは何か．

- 線形システムの例，線形ではないシステムの例

$$S[x(t)] = x(t)^2 \tag{6}$$

- 時不変システムの定義

$$y(t+a) = S[x(t+a)] \tag{7}$$

  入力のタイミングがずれたら，その分，出力のタイミングも同じだけずれる，ということ．ある同じ入力に対し，今日の反応と明日の反応が変わらないということ．相手が機械であれば，いたって自然 (相手が人間の場合，そうはいかない)．

- 因果性について

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 0(t < t_1)\ \text{のとき} && (8)\\
\text{必ず}\ y(t) &= S[x(t)] = 0(t < t_1) && (9)
\end{aligned}
$$

音声信号への応答や，車のアクセルの踏み込みへの応答などを考えた場合，システムの出力が，その時間までの入力信号にのみ依存し，未来の入力に依存することはない．これが因果性．空間的な相互作用を考える場合は，因果的でないと考える．講義では $f(t)$ を時間信号だと考え，因果的なシステムだけを考える．

8.2 入出力信号の関係

問： 入力信号 $x(t)$ をどのように分解すればよいか．その時，どんな利点があるか．

表現（分解）の仕方は無数にある．ここでは 2 通りの分解を考え，それらの利点を理解する．
1. インパルス列に分解
2. 複素正弦波に分解

8.3 インパルス応答：$h(t) = S[\delta(t)]$ （p. 141, 8.3, 8.4 式）

複素正弦波に分解すれば御利益があると信じ，今までフーリエ級数，フーリエ変換を学習して来たのだから，複素正弦波に分解すればいいのだが，ここでは，デルタ関数列に分解する．デルタ関数を使えば，どんな関数も表現できることはすでに習った．これも一つの自然な表現ではある．

$$
\begin{aligned}
y(t) &= S[x(t)] = S\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)
\end{aligned}
$$

その意味

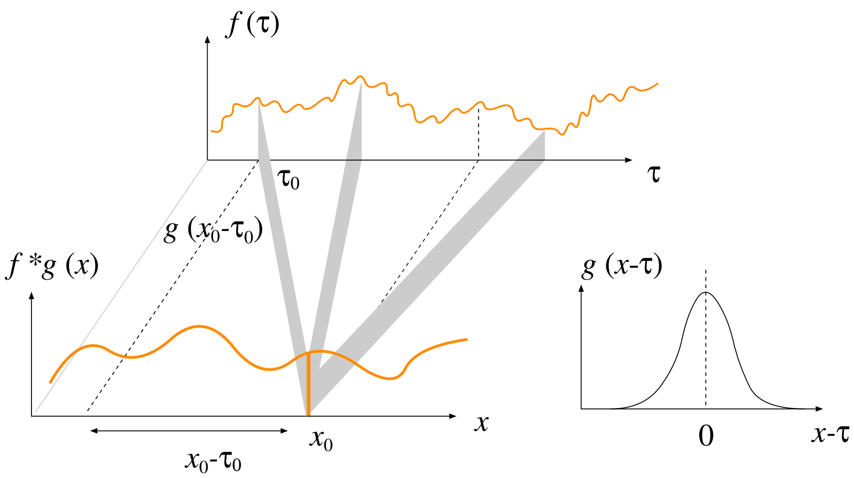
文字通り，線形時不変システムに，入力にインパルス 1 つが入力された場合，得られる出力が「インパルス応答」．システムが，線形でかつ時不変の場合は，インパルス応答 $h(t)$ がわかっていれば，信号 $x(t)$ がシステムに入力された場合，出力 $y(t)$ がどうなるかは，たたみこみと呼ばれるものを計算すれば正確に予測できることを上式は意味している．

つまり，ありとあらゆる入力に対する出力を調べる必要はない．

コンボルーション， 畳み込み積分

$$
f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau
$$

これが「たたみこみ」の定義である．この式を見ただけでは，その意味はわかりにくいし,「たたみこみ」という言葉がその意味を直感的には伝えてくれない.「たたみこみ」の意味は「8. 線形システムの解析」で明確になるが，一つの解釈として，2 つの信号 $f(x), g(x)$ があったときに，どちらかを重みの係数だと考えればわかりやすい．図では $f(x)$ を信号，$g(x)$ を重みであると解釈している．たたみこんで得られた関数 $f * g(x)$ は各場所 (時間） x において，場所 $f(\tau)$ の信号を



$g(x-\tau)$ の重みを掛け算して $\tau=-\infty$ から ∞ まで足す操作をおこなった結果である．$f(x)$ を重みの係数だと思ってもよく，

$$f*g(x) \quad = \quad g*f(x)$$

が成り立っている．今の段階では，何がなんだかわからないかもしれない．ここでは，こういう説明で勘弁してもらいたい．重要なことは，

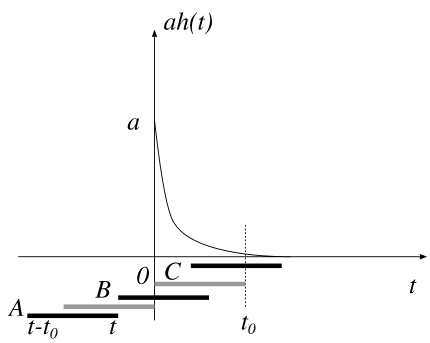
$$f*g(x) \quad \rightarrow \quad F(\omega)G(\omega)$$

という，2つの関数をたたみこみんだ関数のフーリエ変換は，それぞれの関数をフーリエ変換したものを掛け算した結果と同じになることである．

【具体例】

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \tau \le 0, \tau > t_0 \text{ で } f(\tau)=0 \text{ より} \\
&= \int_{0}^{t_0} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 0 \le \tau \le t_0 \text{ で } f(\tau)=a \text{ より} \\
&= \int_{0}^{t_0} ah(t-\tau)d\tau \qquad t-\tau=\tau' \text{ と置換すると，} -d\tau = d\tau' \\
&= -\int_{t}^{t-t_0} ah(t-\tau)d\tau = \int_{t-t_0}^{t} ah(\tau')d\tau'
\end{aligned}$$

したがって，この積分は時刻 t が以下のように分けて計算をする必要がある．
（図を書けばよくわかる．問題を読めば $t_0>0$ であることはわかる.）



i) $t<0$ のとき 0 を積分しても 0 なので $g(t)=0$ となる．
ii) $0<t<t_0$ のとき（途中で 0 になる）

$$g(t)=\int_0^t ah(\tau')d\tau'=\int_0^t ae^{-2\tau'}d\tau'=-\frac{a}{2}[e^{-2\tau'}]_0^t=-\frac{a}{2}(e^{-2t}-1)$$

iii) $t>t_0$ のとき

$$g(t)=\int_{t-t_0}^t ah(\tau')d\tau'=\int_{t-t_0}^t ae^{-2\tau'}d\tau'=-\frac{a}{2}[e^{-2\tau'}]_{t-t_0}^t=-\frac{a}{2}(e^{-2t}-e^{-2(t-t_0)})=-\frac{a}{2}e^{-2t}(1-e^{2t_0})$$

【$t=0$ でインパルスを入力したとき，$t=5$ までその応答が残っている場合，出力側の立場でみると，5 時刻前 (時刻 $t-5$) から現在 (時刻 t) までの入力のみが，現在の出力に影響を与えている.】

インパルス列に分解することの欠点

このようなシステムを 2 つ直列に繋げば，その出力がどうなるか考えてみる．入力を $f(t)$，システム 1 の出力を $g_1(t)$ ，システム 2 の出力を $g_2(t)$ とすると，

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= f*h_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h_1(t-\tau)d\tau \\
g_2(t) &= \{f*h_1(t)\}*h_2(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau_1)h_1(\tau_2-\tau_1)d\tau_1\right]h_2(t-\tau_2)d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau_1)h_1(\tau_2-\tau_1)h_2(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

となり，出力は 2 重積分で表現できる．システムを 3 つ，4 つと直列に繋ぐと出力がどのように表現できるかは，ここから予想がつく．このような出力の計算はとても面倒である.「インパルスを入力するとインパルスしか出てこない」のであれば，入力をインパルスに分解しておけば，出力もインパルスの足し算で済むので都合がいいが，そうはならない.

この表現の欠点： インパルスを入力しても，インパルスが出てこない.

そうはならないのなら，そうなる関数をみつけよう．つまり，

$$S[\psi(t)]=\lambda\psi(t)$$

のように，システムを通過前後の関数形が不変な関数 $\psi(t)$ （固有関数と呼ぶ）があれば都合がいい．$\psi(t)$ の一つとして複素正弦波 $e^{j\omega t}$ がある．これが今までフーリエ級数やフーリエ変換を学習してきた理由の一つである.

8.4 周波数領域でのシステムの表現： 周波数応答 $H(\omega)$

- 結果を先にいうと，$e^{j\omega t}$ を線型時不変システムに入力すると，$H(\omega)e^{j\omega t}$ が出力される．このことを

$$S[e^{j\omega t}]=H(\omega)e^{j\omega t}$$

と書こう．ここで $H(\omega)$ はインパルス応答 $h(t)$ のフーリエ変換で周波数特性と呼ばれており，

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\mathrm{Arg}H(\omega)}$$

とかける．これが正しいことを式でみてみよう．

$$\begin{aligned}
y_(t) &= S[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}h(t-\tau)d\tau \quad \tau' = t-\tau \text{ と置いて} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau')}h(\tau')d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau'}h(\tau')d\tau' e^{j\omega t} \\
&= H(\omega)e^{j\omega t} = |H(\omega)|e^{i\mathrm{Arg}H(\omega)}e^{j\omega t} \\
&= |H(\omega)|e^{i(\omega t+\mathrm{Arg}H(\omega)} \\
&= |H(\omega)|e^{i\omega(t+\frac{\mathrm{Arg}H(\omega)}{\omega})}
\end{aligned}$$

これは入力に角周波数 ω の正弦波が入ると，出力は入力と同じ角周波数 ω の正弦波であり，振幅が入力の振幅の $|H(\omega)|$ 倍，位相が入力に比べ $\theta = \mathrm{Arg}H(w)$ だけ遅れて出てくることを意味している．位相が遅れるということは時間の推移（$-\dfrac{\mathrm{Arg}H(\omega)}{\omega}$）が生じるというである．このように $e^{j\omega t}$ を入力しても $e^{j\omega t}$ の周波数は変わらず，その振幅と位相が変化するだけである．したがって複素正弦波 $e^{j\omega t}$ は線型時不変システムにおいて固有関数になっており，$H(\omega)$ が固有値になっている．

- 線型時不変システムでは入力信号の持つ周波数以外の周波数成分が出力に生じることはない．
- したがって，入力信号を

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

のように，さまざまな角周波数をもつ複素正弦波に分解して表現しておけば，その出力は.

$$\begin{aligned}
y(t) &= S[x(t)] = S\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)S[e^{j\omega t}]d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}$$

と，たたみこみ演算は必要なく，単に掛け算で表現できる．

よくみると，この式は出力 $y(t)$ が $F(\omega)H(\omega)$ の逆フーリエ変換になっていることを意味している．

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)G(\omega)] = y(t)$$

したがって出力 $y(t)$ のフーリエ変換 $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

という関係になっている（式 8.6）.

<u>伝達関数としての周波数特性</u>

– 周波数応答 $H(\omega)$ は，

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

のように，出力信号のフーリエ変換を入力信号のフーリエ変換で割り算した形になっており，これを伝達関数と呼ぶこともある．

– 直列に繋いだシステム

$S[e^{j\omega t}] = H(\omega)e^{j\omega t}$ という性質を利用して，直列に繋いだシステムの出力がどうなるか考えてみよう．

$$x(t) \Longrightarrow y_1(t) \Longrightarrow y_2(t)$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= S[x(t)] = S\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)S\left[e^{j\omega t}\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
y_2(t) &= S[y_1(t)] = S\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H_1(\omega)S[e^{j\omega t}]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}$$

この式は，$y_2(t)$ は $X(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)$ を逆フーリエ変換したものであることを意味している．したがって，

$$Y_2(\omega) = X(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)$$

$$\frac{Y_2(\omega)}{X(\omega)} = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

となり，直列につないだシステムでは，それぞれのシステムの伝達関数を掛け算したものがシステム全体の伝達関数になっていることがわかる．

まとめ

周波数特性 $H(\omega)$ は以下の 4 つの呼び名があった．一つのことにこれだけ別名がついているのはややこしいとも思うが，すべて同じこと．これらのことをスッキリと理解したい．

1. 周波数特性：$H(\omega)$ により振幅の拡大縮小，位相遅れがわかる．
2. インパルス応答のフーリエ変換
3. 伝達関数：入力のフーリエ変換に $H(\omega)$ を掛ければ出力のフーリエ変換が得られる．
4. 線型時不変システムの固有値：複素正弦波が線型時不変システムの固有関数 (線形代数で習った固有ベクトル）になっており，そのときの固有値が $H(\omega)$．これが数ある変換の中でフーリエ変換がよく使われる理由．

次回

総まとめ

【演習問題 p.147】

次の式で表される関数を単位方形パルスという．

$$p(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \geq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

インパルス応答 $h(t)$ が $h(t) = p(t)$ で表される線形システムについて

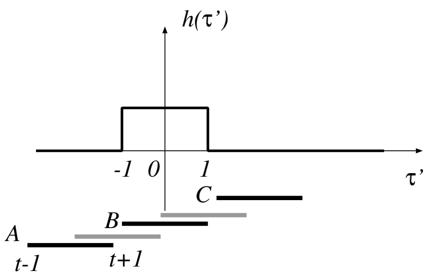
(1) システム関数 $H(\omega)$ を求めなさい．

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt && (10) \\ &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}dt && (11) \\ &= 2\int_{0}^{1} \cos\omega t dt && (12) \\ &= \frac{2}{\omega}[\sin\omega t]_0^1 dt && (13) \\ &= \frac{2\sin\omega}{\omega} && (14) \end{aligned}$$

(2) この線形システムに単位方形パルスを入力した．出力 $y(t)$ と，そのフーリエ変換を求めなさい．

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)h(t-\tau)d\tau && \tau < -1, \tau > 1 \text{ で } p(\tau) = 0 \text{ より} \\ &= \int_{-1}^{1} p(\tau)h(t-\tau)d\tau && -1 < \tau < 1 \text{ で } p(\tau) = 1 \text{ より} \\ &= \int_{-1}^{1} h(t-\tau)d\tau && t - \tau = \tau' \text{ と置換すると，} -d\tau = d\tau' \\ &= -\int_{t+1}^{t-1} h(\tau')d\tau' = \int_{t-1}^{t+1} h(\tau')d\tau' \end{aligned}$$

この積分は t の値に依存して変化する．したがって以下のように分けて計算をする必要がある．（図を書けばよくわかる.）



i) $t + 1 < -1$，つまり $t < -2$ のとき 0 を積分しても 0 なので $y(t) = 0$ となる．

ii) $-2 < t < 0$ のとき

$$y(t) = \int_{-1}^{t+1} h(\tau')d\tau' = \int_{-1}^{t+1} 1 d\tau' = [\tau']_{-1}^{t+1} = t + 1 - (-1) = t + 2$$

iii) $t+1>1$ かつ $t-1<1$，つまり $0<t<2$ のとき

$$y(t)=\int_{t-1}^{1}h(\tau')d\tau'=\int_{t-1}^{1}1d\tau'=[\tau']_{t-1}^{1}=1-(t-1)=2-t$$

iv) $t-1>1$，つまり $t>2$ のとき 0 を積分しても 0 なので $y(t)=0$ となる．
（この関数の図は教科書 p.155 参照）

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt && (15)\\
&= \int_{-2}^{2}y(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt && (16)\\
&= \int_{-2}^{2}y(t)(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt && (17)\\
&= 2\int_{-2}^{0}y(t)(\cos\omega t)dt && (18)\\
&= 2\int_{0}^{2}(-t+2)\cos\omega tdt && (19)\\
& && (20)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2}(-t+2)\cos\omega tdt &= \left[\frac{(-t+2)\sin\omega t}{\omega}\right]_0^2-\int_0^2-\frac{\sin\omega t}{\omega}dt && (21)\\
&= -\left[\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\right]_0^2 && (22)\\
&= -\frac{\cos 2\omega}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos 2\omega) && (23)\\
&= \frac{2}{\omega^2}(\sin^2\omega)\text{（ ここで }\cos 2\omega=1-2\sin^2\omega\text{ を用いた）} && (24)
\end{aligned}$$

したがって

$$Y(\omega) = 4\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 \qquad (25)$$

　こんな大変な計算をしなくても

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= H(\omega)\times X(\omega) && (26)\\
&= 4\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 && (27)
\end{aligned}$$

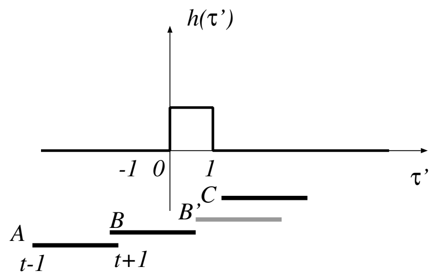
で求まる．
　ただし，これは因果性が無い場合．因果性のある（未来の入力は現在の出力に影響を与えない）場合は,

$$h(t)=\begin{cases}1 & (0<t<1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \tau < -1, \tau > 1 \text{ で } p(\tau) = 0 \text{ より} \\
&= \int_{-1}^{1} p(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad -1 < \tau < 1 \text{ で } p(\tau) = 1 \text{ より} \\
&= \int_{-1}^{1} h(t-\tau)d\tau \qquad t - \tau = \tau' \text{ と置換すると，} -d\tau = d\tau' \\
&= -\int_{t+1}^{t-1} h(\tau')d\tau' = \int_{t-1}^{t+1} h(\tau')d\tau'
\end{aligned}
$$

この積分は t の値に依存して変化する．したがって以下のように分けて計算をする必要がある．（図を書けばよくわかる.）



i) $t+1<0$，つまり $t<-1$ のとき 0 を積分しても 0 なので $y(t)=0$ となる．
ii) $t+1>0$ かつ $t+1<1$，つまり $-1<t<0$ のとき.

$$y(t) = \int_{0}^{t+1} h(\tau')d\tau' = \int_{0}^{t+1} 1d\tau' = [\tau']_{0}^{t+1} = t+1$$

iii) $t+1>1$ かつ $t-1<0$，つまり $0<t<1$ のとき

$$y(t) = \int_{0}^{1} h(\tau')d\tau' = \int_{0}^{1} 1d\tau' = [\tau']_{0}^{1} = 1$$

iii) $t-1>0$ かつ $t-1<1$，つまり $1<t<2$ のとき

$$y(t) = \int_{t-1}^{1} h(\tau')d\tau' = \int_{t-1}^{1} 1d\tau' = [\tau']_{t-1}^{1} = 1-(t-1) = 2-t$$

iv) $t-1>1$，つまり $t>2$ のとき 0 を積分しても 0 なので $y(t)=0$ となる．この関数の図を以下に示す.