学籍番号：760 ___ ___ ___ ___ 0

2006 年 12 月 4 日

線形代数　　　　名前：＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト： 解答例

【直交基底； グラムシュミットの方法】

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられるユークリッド内積をもった $\mathcal{R}^3$ の基底から正規直交基底を作れ.

1. $\boldsymbol{u}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{u}_1||}$, $||\boldsymbol{v}_1|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ に直交す成分のベクトルは $\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2$. このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_2$. まず分子 $\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. これ自身をこの大きさで割ったものが $\boldsymbol{v}_2$ となる. $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_2$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 >= \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に直交する成分のベクトルは

   $$\boldsymbol{u}_3 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-3+1 \\ 0+3+1 \\ 6-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$