情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 1 回
2006 年 10 月 2 日

講義の全体像: ベクトルとその応用

線形代数 ← 理工系数学の華

- 担当教員： 伊達 章
- 連絡先： A-423, date@cs.miyazaki-u.ac.jp, 内線 7986
- 成績の評価方法：期末試験 80%，小テスト（演習問題） 20%
- 内容に関する質問について：
  - ・オフィスアワー以外も可能な限り受け付けます
  - ・講義中の質問も歓迎 → ほかの人の理解の助けにもなる

講義の内容

- 線形空間 （第 4 章）

  4.1 n 次元ユークリッド空間
  4.2 線型空間
  4.3 部分空間
  4.4 1 次独立性
  4.5 基底と次元
- 1 次変換 （第 5 章）
- 固有値・固有ベクトル （第 6 章） ← 線形代数の中心

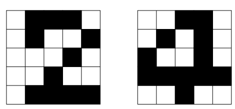
  「物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる」

何の役にたつのか，関連する科目

- 音・音声の表現，画像の現表，時系列信号の解析

  音声，画像がなぜベクトルか.

  画像の例： $5 \times 5 = 25$ 次元ベクトル．2 値．2^{25} とおり.

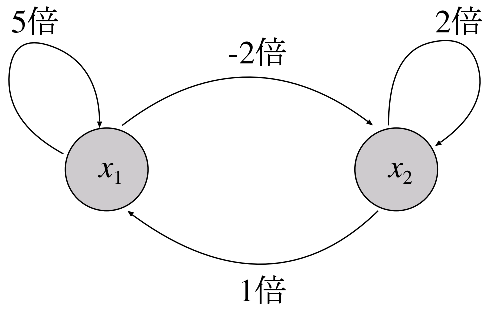


  $\boldsymbol{x} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots)^{\mathrm{T}}$
- パターン認識：

  入力： 25 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \to 0 \sim 9$ （テンプレートに一番近いものを選ぶ）
- 応用数学 2，線形システムと信号処理，確率論と情報理論

$\boxed{\text{固有値，固有ベクトルとは}}$

<u>問題： n 回更新した後の状態を求めたい</u>



$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

具体的な値を代入し，できるところまで計算してみる

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}'' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}''' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ -94 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}^{(n)} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \cdots \end{aligned}$$

n 回あとの状態を求めるのに，何回掛け算と足し算が必要か $\rightarrow$ $4n$ 回の掛け算と $2n$ 回の足し算.

$\boxed{\text{手品のはじまり}}$

$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と座標変換して $\boldsymbol{y}$ で考える.

- $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ 2x_2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

P をどう決めたか，という疑問はとりあえず置いておき，$\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'', \boldsymbol{y}'''$ を求めてみる.

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}'' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ 64 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}''' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 175 \\ -94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -81 \\ 256 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{y}$ でシステムの状態を考えると，1時刻あとでは y_1 が3倍，y_2 が4倍されている．
$\boldsymbol{x}$ より $\boldsymbol{y}$ で考えた方が計算がとても簡単．実は，この3と4が固有値.
$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ なので，$\boldsymbol{x}^n = P\boldsymbol{y}^n$ として求まる．

種明かし： 変換の行列 P はどう求めたのか

変換後に

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \Lambda \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix}$$

となるような a, b, c, d を求めてみる．

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \Lambda \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \Lambda \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 9y_1 \\ 16y_2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y}$ の時間発展が対角行列で表現できるようになれば好ましい．

$$\boldsymbol{y}' = \Lambda \boldsymbol{y} \tag{4}$$

これを $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の形にもっていこう（A は与えられている）．

$$P^{-1}\boldsymbol{x}' = \Lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}' = P\Lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

これが $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ であればいい． 与えられている A を元に，

$$A = P\Lambda P^{-1} \tag{7}$$

となるよう，行列 P と対角行列 Λ を求めればいい．右から P をかけて

$$AP = P\Lambda \tag{8}$$

となる．P を縦ベクトル2つを横に並べたものとみて，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$，$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ とおくと，この式は

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 \; A\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \; \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

となり，

$$A\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1, \; A\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2$$

となる．この式を満たす $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \lambda_1, \lambda_2$ を求めれば，P, Λ が分かる．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を固有ベクトル，λ_1, λ_2 を固有値という．

- $\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^n \boldsymbol{y} = P\Lambda^n P^{-1} \boldsymbol{x}$

P は固有ベクトルを並べた行列．Λ は対応する固有値を対角上に並べた行列

定義

ある n 次元正方行列 A に対して,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

をみたす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \neq 0)$ と数 λ が存在するとき,

1. λ を 行列 A の固有値
2. $\boldsymbol{x}$ を 固有値 λ に対する固有ベクトル

   という．固有ベクトルは，λ が実数のとき，A という行列をかけても方向が変わらないベクトルと解釈できる．

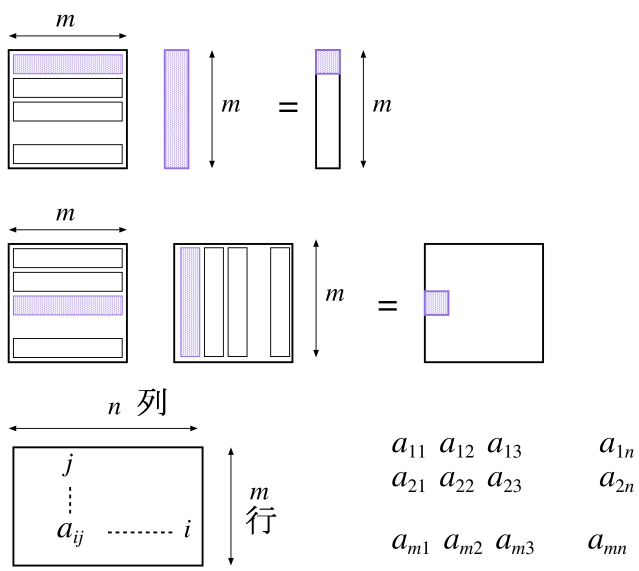
復習： ベクトル： 内積，線形結合，行列の演算

- 線形とは

  ※ 「1 次」と「線形」は同じ意味）

- 基本は縦ベクトル
- 行列の演算

視覚イメージ： 行列の掛け算



例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix} \tag{11}$$

1. 横ベクトル × 縦ベクトルが数．
2. 正方行列の掛け算の場合，前側の行列を横ベクトル，後ろを縦ベクトルの集まりだと考える．掛け算した結果も縦ベクトルの集まりと考える．

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} =$ 数.