情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 2 回
2006 年 10 月 16 日

線型空間 その 1： 線形空間の公理

今日の目標 ： 以下の事を理解する．

1. ベクトルの概念の一般化

   ベクトルはどういう性質を持つか： 「和とスカラー倍に関して閉じている」

4.1 n 次元ユークリッド空間

- n 次元列ベクトル： n 個の実数を縦に並べたもの

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  上から順に，第 1 成分，第 2 成分，$\cdots$．特に断らない限り，ベクトルといったら縦ベクトル．

  例：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [2, 3, 5, 8]$$

- n 次元列ベクトル空間 R^n： n 次元列ベクトルの集合．

  定義（教科書 p.150）

  あたりまえの事を，と思うかもしれないが，実は意味がある．

  ベクトルの同値： $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

  和 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とスカラー倍 $k\boldsymbol{u}$ の定義．

  ゼロベクトルの定義： $\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)$

  逆元の定義： $-\boldsymbol{u}$

- n 次元ユークリッド空間：

  以下のように n 次元列ベクトル空間に内積，長さが定義された空間．

  内積： $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

  ベクトルの長さ（ノルム）： $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

  ユークリッド距離：$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

  $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| ||\boldsymbol{v}|| \cos\theta$

4.2 線型空間 （ベクトル空間）

- ベクトルの概念の一般化

  ベクトルに定数をかけてもベクトルが得られる．

  2 つのベクトルを加えてもベクトルが得られる．

  「集合 V は，定数倍と和に関して閉じている」

  $\boldsymbol{u} \in V$： $\boldsymbol{u}$ が集合 V の元であること

- ベクトル空間（線形空間）の公理

  「公理」とは： 前提として仮定するいくつかの事柄

  「定理」とは： 複数の公理から論理的，数学的に導出される命題

  「命題」とは： 真か偽のどちらか（真理値）を決定しうる文

  公理（教科書 p.157）

  「どのように定義してもよいが，最低限このような性質は満たすように定義しなければならない」ということを公理として定めている．公理を満たす限り具体的な定義は自由

  公理 7，公理 8 で異なるのは，分配法則におけるスカラーとベクトルの違い．

  公理 10

- 例

  例 9 は注意したい．

  次数が n をこえない変数 t の多項式

  $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$