情報システム工学科　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　線形代数 第 3 回
伊達 章　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2006 年 10 月 23 日

線型空間 その 2： 線形空間の公理

$\boxed{\text{今日の目標}}$： 以下の事を理解する.

1. 部分空間：「和とスカラー倍に関して閉じている」

   $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$： $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が集合 W の元であること

   $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W, \quad k\boldsymbol{u} \in W$

先週

1. n 次元ユークリッド空間
2. ベクトルの概念の一般化： 線型空間（ベクトル空間）の公理

   ベクトルはどういう性質を持つか

<u>定理 3</u> （教科書 p.161）
（「定理」とは： 複数の公理から論理的，数学的に導出される命題）

(a) $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を公理を使い証明したい.

$0\boldsymbol{u} = (0+0)\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u}$
$0\boldsymbol{u}$ には $0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたす逆元 $\boldsymbol{v}$ が存在する.
$0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u}$ の両辺に $\boldsymbol{v}$ を加える.
$0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
$0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
$0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(b) $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ を証明.

$k\boldsymbol{0} = k(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}) = k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{0}$
$k\boldsymbol{0}$ には $k\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたす逆元 $\boldsymbol{v}$ が存在する.
$k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{0} = k\boldsymbol{0}$ の両辺に $\boldsymbol{v}$ を加える.
$k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = k\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}$
$k\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
$k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

(d) $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ならば， $k = 0$ または $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を証明.

k が 0 でない場合を考える.
$k\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{0}$
両辺に $1/k$ をかける.
$\boldsymbol{u} = 1/k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ （ (b) より ）
次に $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ で無い場合を考える.
$k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
$2k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} = k\boldsymbol{u}$
$2k = k$ の解は $k = 0$.

4.3 部分空間　（教科書 p.163）
定義： W は V の線形部分空間
　線形空間 V の部分集合 W のうち，それ自身も線形空間になっている線形空間.

- W のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'$ に対して，和 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}'$ も W 内に入る
- W のベクトル $\boldsymbol{u}$ と数 k に対して，定数倍 $k\boldsymbol{u}$ も W 内に入る

　イメージ：V 内のベクトルは無数に存在する．その一部分の要素だけ取ってきても，線形空間が成り立っている.
例

- R^3 内の原点を通る平面や直線は，R^3 の部分空間になっている.（教科書 p.164 例 11）
- 例 12-15

線形空間の次元： 与えられた線形空間 V は何次元か.
一次結合（線形結合とも言う）

$$w = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots k_r\boldsymbol{v}_r$$

　教科書 p.168.　例 16

定義
　線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を用いて，V の任意のベクトルを 1 次結合として表すことができるとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線形空間 V を**張る**という.

　教科書 p.169.　例 17, 18